

Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова  
Международная научно-исследовательская лаборатория  
«Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне  
Институт компьютерных исследований,  
Удмуртский государственный университет  
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

## **Международная конференция**

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ,**

**посвященная 150-летию со дня рождения  
Поля Пенлеве (1863–1933)**

## **ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ**

Ярославль, 15–18 октября 2013 г.

---

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
International B.N. Delaunay Laboratory of  
Discrete and Computational Geometry  
Institute of Computer Science of the Udmurt State University  
Steklov Mathematical Institute (RAS) in Moscow  
National Research Nuclear University «MEPhI»

## **International Conference**

**NONLINEAR DYNAMICS AND ITS APPLICATIONS,**

**dedicated to the 150<sup>th</sup> anniversary of the birth of  
Paul Painlevé (1863–1933)**

## **ABSTRACTS**

Yaroslavl, October 15–18, 2013

**Международная конференция  
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ,  
посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве  
Ярославль, 15–18 октября 2013 г.**

**ОРГАНИЗАТОРЫ**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Международная научно-исследовательская лаборатория  
«Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне  
Институт компьютерных исследований,  
Удмуртский государственный университет  
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ**

Российский фонд фундаментальных исследований  
Грант Правительства РФ по постановлению № 220

**ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

В.В. Козлов (сопредседатель),  
С.А. Кащенко (зам. сопредседателя),  
H. Edelsbrunner (сопредседатель),  
А.В. Борисов,  
А.Г. Владимиров,  
С.Н. Гурбатов,  
Н.А. Кудряшов,  
Д.В. Тураев,  
A. Albouy,  
A. Maciejewski

**ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

С.Д. Глызин (председатель),  
П.Н. Нестеров (секретарь),  
Д.В. Глазков,  
Д.С. Глызин,  
Н.Н. Ермакова,  
И.С. Кащенко

**International Conference**  
**NONLINEAR DYNAMICS AND ITS APPLICATIONS,**  
**dedicated to the 150<sup>th</sup> anniversary of the birth of Paul Painlevé**  
**Yaroslavl, October 15–18, 2013**

**ORGANIZERS**

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
International B.N. Delaunay Laboratory of  
Discrete and Computational Geometry  
Institute of Computer Science of the Udmurt State University  
Steklov Mathematical Institute (RAS) in Moscow  
National Research Nuclear University «MEPhI»

**SPONSORED BY**

Russian Foundation for Basic Research  
Russian Government Grant 220

**PROGRAM COMMITTEE**

V. Kozlov (co-chairman),  
S. Kaschenko (deputy co-chairman),  
H. Edelsbrunner (co-chairman),  
A. Borisov,  
A. Vladimirov,  
S. Gurbatov,  
N. Kudryashov,  
D. Turaev,  
A. Albouy,  
A. Maciejewski

**ORGANIZING COMMITTEE**

S. Glyzin (chairman),  
P. Nesterov (secretary),  
D. Glazkov,  
D. Glyzin,  
N. Erdakova,  
I. Kaschenko

УДК 517.928  
ББК В18я43  
Н 49

**Н 49**

**Нелинейная динамика и её приложения:** Международная конференция, посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве: Тезисы докладов. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — 68 с.  
ISBN 978-5-8397-1005-4

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова проводит с 15 по 18 октября 2013 года в г. Ярославле международную конференцию «Нелинейная динамика и её приложения», посвященную 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве. Данный сборник содержит тезисы докладов, представленных на конференцию. Тезисы докладов публикуются в авторской редакции.

Конференция проводится при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-06090 г и гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

УДК 517.928  
ББК В18я43

ISBN 978-5-8397-1005-4

© Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2013

© Авторы, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

<b>Бобок А.С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.</b> Динамика трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных уравнений с двумя запаздываниями Dynamics of three unidirectionally coupled singularly perturbed equations with two delays . . . . .	8
<b>Богаевская В. Г., Кащенко И. С.</b> Влияние запаздывания на устойчивость периодических орбит Delay effect for the stability of periodic orbits . . . . .	11
<b>Бурд В. Ш.</b> $\pi$ -кинки в параметрически возбужденном уравнении синус-Гордон $\pi$ -kinks in the parametrically excited sine-Gordon equation . . . . .	12
<b>Бутузов В. Ф.</b> О сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения On singularly perturbed problems with multiple root of the degenerate equation . . . . .	13
<b>Бутузова М. В.</b> О системе тихоновского типа в случае кратного корня вырожденного уравнения On a Tychonoff-type system in the case of a multiple root of the degenerate equation . . . . .	15
<b>Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.</b> Неклассические релаксационные циклы сингулярно возмущенных систем с запаздыванием Non-classical relaxation cycles of singularly perturbed systems with delay . . . . .	17
<b>Иванов А. П.</b> О парадоксах Пенлеве On Painlevé paradoxes . . . . .	20
<b>Кащенко А. А.</b> Устойчивость автомодельных решений для одной лазерной системы Stability of automodel solutions of one laser system . . . . .	21
<b>Кащенко И. С.</b> Нормализация уравнения с большим и очень большим запаздыванием Normalization of equation with large and very large delay . . . . .	22
<b>Кащенко С. А.</b> Динамика уравнения с малым пространственно-распределенным управлением The dynamics of one equation with small space-distributed control . . . . .	24

## СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

<b>Кубышкин Е. П., Тряхов М. С.</b>	
Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику руки телескопического манипулятора Optimal control of the behavior of solutions of initial-boundary-value problem modeling the dynamics of the hand of telescopic manipulator . . . . .	25
<b>Куликов А. Н.</b>	
Сценарий Ландау-Хопфа и некоторые задачи из теории упругой устойчивости Landau-Hopf scenario and some problems from the theory of the elastic stability . . . . .	27
<b>Куликов А. Н., Куликов Д. А.</b>	
Уравнение Курамото-Сивашинского. Бифуркационные задачи Equation of Kuramoto-Sivashinsky. Bifurcation problems . . . . .	29
<b>Куликов Д. А.</b>	
Автомодельные периодические решения в задачах о динамике связанных осцилляторов Self-similar periodic solutions in the problems of the dynamic of coupled oscillators . . . . .	31
<b>Нестеров П. Н., Агафончиков Е. Н.</b>	
Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием Features of oscillations in adiabatic oscillators with delay . . . . .	33
<b>Albouy A.</b>	
On Painlevé's extension to Bruns' theorem of non-existence of first integrals in the 3-body problem . . . . .	35
<b>Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.</b>	
On the motion of a spherical shell on a plane . . . . .	36
<b>Bolotin S. V.</b>	
The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors . . . . .	38
<b>Bolsinov A. V., Kilin A. A., Kazakov A. O.</b>	
Topological monodromy in nonholonomic systems . . . . .	39
<b>Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.</b>	
On the dynamics and control of Chaplygin ball . . . . .	40
<b>Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Karavaev Yu. L.</b>	
On the motion of a rolling disk . . . . .	42
<b>Demina M. V., Kudryashov N. A.</b>	
Point vortices, multi-particle systems, and polynomials . . . . .	43
<b>Erdakova N. N., Mamaev I. S., Karavaev Yu. L.</b>	
On the motion of a disk on a horizontal rough plane . . . . .	45
<b>Glazkov D. V.</b>	
Dynamics of second order equations with asymptotically large delay . . . . .	46
<b>Glyzin D. S.</b>	
Numerical analysis of pseudohyperbolicity . . . . .	47
<b>Grigorieva E. V.</b>	
Dynamics of relaxation oscillations in two-mode microchip laser . . . . .	48
<b>Ivanova T. B., Ivanov A. P., Mamaev I. S.</b>	
On the motion of a stick-like body on a rough surface . . . . .	50
<b>Kazakov A. O., Borisov A. V.</b>	
On the dynamics of a rubber rock'n'roller on a plane . . . . .	52
<b>Kilin A. A., Vetchanin E. V., Tenenev V. A., Shaura A. S.</b>	
On the motion and control of a three-axial ellipsoid in the viscous fluid . . . . .	54

## СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

---

<b>Kozlov V. V.</b>	
Notes on integrable systems . . . . .	56
<b>Kudryashov N. A.</b>	
Painlevé equations and their hierarchies . . . . .	57
<b>Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I.</b>	
Painlevé analysis and exact solutions of extended model for nonlinear waves in liquid with gas bubbles . . . . .	58
<b>Pivovarova E. N., Ivanova T. B.</b>	
On the motion of a ball with a spherical pendulum . . . . .	59
<b>Sokolov S. V.</b>	
Falling of a heavy circular cylinder interacting dynamically with $N$ point vortices . . . . .	61
<b>Treschev D. V.</b>	
КАМ-tori near resonances . . . . .	62
<b>Vetchanin E. V., Kilin A. A., Tenenev V. A., Shaura A. S.</b>	
On the motion and control of a three-axial ellipsoid in the viscous fluid . . . .	63
<b>Елисеев Д. А., Кубышкин Е. П.</b>	
Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей поворот твердого тела с двумя упругими стержнями Optimal control of the behavior of solutions of initial-boundary-value problem modeling the rotation of a rigid body with two elastic rods . . . . .	65
<b>Сахаров А. В., Иванов А. П.</b>	
Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами на шероховатой поверхности Rigid body dynamics with moving internal masses on a rough surface . . . .	67

**ДИНАМИКА ТРЕХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ  
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

**DYNAMICS OF THREE UNIDIRECTIONALLY COUPLED  
SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS  
WITH TWO DELAYS**

**Бобок А.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия;  
glyzin@uniyar.ac.ru*

Рассматривается система однонаправленно связанных сингулярно возмущенных скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями, моделирующих электрическую активность кольцевой нейронной ассоциации. Устанавливается, что при подходящем выборе параметров в фазовом пространстве этой системы может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений, т.е. наблюдается явление буферности (см. [1, 2]).

Следуя методике статьи [3], в качестве математической модели кольцевой системы из трех импульсных нейронов возьмем систему дифференциально-разностных уравнений

$$\varepsilon \dot{u}_j = [(a+1)f(u_j(t-\varepsilon h)) - a - bg(u_j(t-1)) + \varepsilon^3 r(u_{j-1})]u_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь  $u_j(t) > 0$  – мембранные потенциалы нейронов,  $u_0 = u_3$ , параметр  $1/\varepsilon > 0$  характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, а положительные параметры  $h, a, b$  имеют порядок единицы. Что же касается функций  $f(u), g(u), r(u) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ , то они удовлетворяют следующим условиям.

*Условие 1. Считаем, что  $f'(u) < 0, g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$  и кроме того выполняются равенства  $f(0) = 1, g(0) = 0, \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0, \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1$ .*

Перед формулировкой второго условия обратим внимание, что перечисленные ограничения на  $f(u), g(u)$  обеспечивают существование и единственность решения  $u = u_0(a, b) > 0$  уравнения  $(a+1)f(u) - a - bg(u) = 0$ . Далее, считая параметр  $a > 0$  фиксированным, введем в рассмотрение функцию  $\psi(b), b \in \mathbb{R}_+$ , задающуюся равенством

$$\psi(b) = (a+1)f'(u)|_{u=u_0(a,b)} + bg'(u)|_{u=u_0(a,b)}. \quad (2)$$

*Условие 2. Предполагаем, что уравнение  $\psi(b) = 0$  имеет на полуоси  $b \in \mathbb{R}_+$  единственное решение  $b = b_* > 0$  и  $\psi'(b_*) > 0$ .*

Остановимся на связи между условиями 1 и 2. Несложный подсчет показывает, что функция  $u_0(a, b)$  по переменной  $b$  обладает свойствами

$$u_0(a, 0) = u_{0,0} > 0, \quad u_0(a, b) = 1/(g'(0)b) + O(1/b^2) \quad \text{при } b \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

где  $u_{0,0}$  – корень уравнения  $f(u) = a/(a+1)$ , который в силу условия 1 определяется однозначно. Учитывая затем соотношения (3) в (2), приходим к выводу, что  $\psi(0) < 0, \lim_{b \rightarrow +\infty} \psi(b) = +\infty$ . Таким образом, условие 1 гарантирует существование у функции (2) хотя бы одного корня  $b = b_* > 0, \psi'(b_*) \geq 0$ , а условие 2 содержит вполне естественные требования о единственности этого корня и о выполнении неравенства  $\psi'(b_*) > 0$ , характеризующего некоторую общность положения.

Для формулировки последнего условия нам потребуются функции

$$V_1(v, b) = \frac{1}{2f'(u)} [f(u(1+v)) - f(u) - f'(u)uv] \Big|_{u=u_0(a,b)}, \quad (4)$$

$$V_2(v, b) = -\frac{b}{2(a+1)f'(u)} [g(u(1+v)) - g(u) - g'(u)uv] \Big|_{u=u_0(a,b)}. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что их тейлоровские разложения в точке  $v = 0$  начинаются с квадратичных слагаемых. В частности, справедливы равенства

$$V_1(v, b_*) = c_1 v^2 + c_2 v^3 + O(v^4), \quad V_2(v, b_*) = d_1 v^2 + d_2 v^3 + O(v^4). \quad (6)$$

Условие 3. Считаем, что  $d \stackrel{\text{def}}{=} 4(c_1^2 - d_1^2) + 2(d_2 - c_2) < 0$ .

Наконец, относительно функции  $r(u)$  будем предполагать, что выполнено представление  $r(u) = \varkappa(u - u_0(a, b)) + O((u - u_0(a, b))^2)$ .

При сформулированных ограничениях поставим вопрос об автоколебательных режимах уравнения (1), бифурцирующих из состояния равновесия  $u = u_0(a, b)$  при изменении параметров  $b, h, \varkappa$ . В связи с этим распорядимся выбором указанных параметров таким образом, чтобы в задаче об устойчивости интересующего нас положения равновесия реализовывался случай, близкий к максимальному вырождению. Подчеркнем, что именно в окрестности максимальной особенности соответствующий локальный анализ может дать наиболее полную информацию об аттракторах исходного уравнения. Учитывая это, систему (1) перепишем в виде (см. [3])

$$\begin{aligned} \varepsilon v_j = - & [(1/2 - \mu)v_j(t - \varepsilon h) + (1/2 + \mu)v_j(t - 1) + \Delta_1(v_j(t - \varepsilon h), \mu) + \\ & + \Delta_2(v_j(t - 1), \mu) + \varepsilon^3 \varkappa v_{j-1}] (1 + v_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad v_0 = v_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta_k = (1 - 2\mu)V_k(v, b_* + \alpha(\mu))$ ,  $k = 1, 2$  (см. (4), (5)), а  $|\mu| \ll 1$  — вспомогательный малый параметр. При дополнительных условиях

$$\mu = \mu_0 \varepsilon^4, \quad h = 1 + \nu_0 \varepsilon^2, \quad \mu_0, \nu_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

к задаче (7) может быть применен метод квазинормальных форм (см. [3]). В данном случае переход к квазинормальной форме осуществляется с помощью замены

$$v_j = \sum_{k=1}^5 \varepsilon^{k+1} v_{k,j}(\tau, \theta, s), \quad \tau = \left(1 + \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k \sigma_k\right) t, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где  $\theta = \varepsilon^3 t$ ,  $s = \varepsilon^4 t$ ,  $v_{k,j}(\tau, \theta, s)$  — подлежащие определению 2-периодические по  $\tau$  функции, а постоянные  $\sigma_k$  заданы равенствами

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \nu_0 - 1, \quad \sigma_4 = -2\nu_0 + 1. \quad (10)$$

Функции  $v_{1,j}(\tau, \theta, s)$  представляются в виде

$$v_{1,j} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n,j}(s) \exp[i\omega_n \tau - i\omega_n^3 \theta/3] + \text{к.с.}, \quad (11)$$

где  $\omega_n = \pi(2n - 1)$ , а комплексные амплитуды  $\xi_{n,j}(s)$ ,  $n \geq 1$ ,  $j = 1, 2, 3$  определяются из условий разрешимости соответствующей задачи на пятом шаге.

Предполагая, что среди комплексных амплитуд  $\xi_{n,j}(s)$  ненулевой является лишь одна  $r$ -я компонента, то есть  $\xi_{r,j}(s) = \eta_j(s)$ ,  $\xi_{n,j}(s) = 0$  при  $n \neq r$ , получаем следующую систему:

$$\frac{d\eta_j}{ds} = (\gamma_r + i\omega_r^3)\eta_j + 3d|\eta_j|^2\eta_j + 2\kappa\eta_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \eta_0 = \eta_3, \quad (12)$$

где  $\gamma_r = 4\mu_0 + 2\nu_0\omega_r^2 - \omega_r^4/3$ .

Исследование автомодельных режимов системы (12) показало, что данная задача может иметь устойчивые режимы трех типов с одинаковыми амплитудами  $|\eta_1| = |\eta_2| = |\eta_3|$  и разностями фаз равными нулю,  $\pi$  и  $2\pi/3$ .

Основным результатом работы является утверждение о сосуществовании у уравнения (7) при подходящем выборе параметров любого наперед заданного числа устойчивых циклов трех типов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
2. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
3. Колесов А. Ю. Специфические релаксационные циклы сингулярно возмущенных систем типа Лотки-Вольтерра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 3. С. 515 – 536.
3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в нейродинамике // ДАН. 2012. Т. 443. № 2. С. 168 – 172.

## ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ DELAY EFFECT FOR THE STABILITY OF PERIODIC ORBITS

Богаевская В. Г.<sup>1</sup>, Кащенко И. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; victory36@mail.ru

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; iliyask@uniyar.ac.ru

Управление устойчивостью периодических решений является одним из ключевых вопросов в области математического моделирования. Наиболее простым и эффективным методом, позволяющим добиться их стабилизации и дестабилизации за счет слабого внешнего воздействия, является метод запаздывающего управления. В настоящей работе был исследован вопрос влияния параметров линейного запаздывающего управления на поведение решений в системе вида:

$$\dot{z} = \sigma z + \gamma |z|^2 z + K(z(t-T) - z), \quad (1)$$

где  $z$  – комплекснозначная функция;  $\gamma$  и  $\sigma$  – некоторые заданные комплексные константы. При этом за счет нормировки времени можно добиться  $\operatorname{Re} \sigma = \pm \frac{1}{2}$ .  $K = \alpha + i\beta$  – комплексный параметр, определяющий коэффициент запаздывающего управления;  $T > 0$  – время запаздывания.

В предположении, что система (1) при  $K = 0$  имеет устойчивую (неустойчивую) периодическую орбиту  $z_*(t)$  была поставлена задача найти области параметров  $K$  и  $T > 0$  так, чтобы  $z_*(t)$  стало неустойчивым (устойчивым).

Для задачи дестабилизации было показано, что она имеет решение даже при условии вещественного  $K$ .

Задача об устойчивости периодической орбиты была сведена к анализу зависимости расположения корней характеристического уравнения

$$\mu^2 - \mu(2\alpha(e^{-\mu T} - 1) - 2\operatorname{Re} \sigma) + (e^{-\mu T} - 1)(-2\operatorname{Re} \sigma \alpha - 2\operatorname{Re} \sigma \frac{\operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Re} \gamma} \beta) + (e^{-\mu T} - 1)^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

от параметров запаздывающего управления.

Аналитически были найдены кривые, при переходе через которые, в плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$ , изменяется количество корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью. Получено, что при некоторых значениях  $\gamma$  и  $\sigma$  данные кривые ограничивают область параметров, при которых стабилизация возможна, причем эта область единственна. Ее наличие легко проверяется благодаря существованию точных аналитических формул, задающих указанные границы.

Таким образом, для задачи стабилизации полностью исследован вопрос ее разрешимости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31128) и гранта Правительства РФ по постановлению № 220 “О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования” по договору № 11.G34.31.0053.

**$\pi$ -кинки в параметрически возбужденном уравнении  
синус-Гордон**  
 **$\pi$ -kinks in the parametrically excited sine-Gordon equation**

**Бурд В. Ш.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; vburd1@gmail.com*

Значительное число работ посвящено развитию техники теории возмущений для систем, близких к интегрируемым, в том числе для систем, близких к уравнению синус-Гордон (см. обзорную статью [1], а также, например, работы [2,3]).

В статье [4] рассматривалось параметрически возбужденное быстро осциллирующей периодической функцией уравнение синус-Гордон:

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(t, x) + f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin u(t, x) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $f(t)$  — периодическая функция с нулевым средним значением и постоянной амплитудой,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. В [4] предложен довольно сложный метод построения усредненного уравнения. В докладе предлагается другой метод построения усредненного уравнения для (1), именно стандартный метод усреднения. Для применения этого метода нужно от уравнения (1) перейти к эквивалентной уравнению (1) системе уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= p - \varepsilon \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin u, \\ p_t &= u_{xx} + \varepsilon \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) p \cos u - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)^2 \sin 2u, \end{aligned} \quad (2)$$

где через  $\varphi(t)$  обозначается периодическая функция с нулевым средним значением, для которой производная  $\varphi'(t)$  удовлетворяет равенству  $\varphi'(t) = f(t)$ .

Усредненное уравнение имеет в качестве решений  $\pi$ -кинки, которые являются приближенными решениями уравнения (1) при малых  $\varepsilon$ .

В [4] отмечается, что результаты могут быть применены к квазиодномерным ферромагнетикам, которые находятся под действием быстроосциллирующего внешнего магнитного поля. Наличие  $\pi$ -кинков оказывает влияние на движение доменных стенок ферромагнетика.

Предложенный метод позволяет исследовать уравнения синус-Гордон с более сложными параметрическими возбуждениями.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly by integrable systems // Reviews of Modern Physics. 1988. V. 61, No. 4, pp. 763–915.
2. Sakai S., Samuelsen M.R., Olsen O.H. Perturbation analysis of a parametrically changed sine-Gordon equation // Physical Review B. 1987. V. 36, No. 1, pp. 217–225.
3. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Parmentier R.D. Kinks in the presence of rapidly varying perturbations // Physical Review E. 1994. V. 49, No. 5, pp. 4542–4551.
4. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets // Physical Review B. 1998. V. 57, No. 9, pp. 5033–5035.

**О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ  
С КРАТНЫМ КОРНЕМ  
ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ**  
**ON SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS  
WITH MULTIPLE ROOT OF  
THE DEGENERATE EQUATION**

Бутузов В. Ф.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Россия; butuzov@phys.msu.ru*

Асимптотические разложения погранслоевых решений сингулярно возмущенных задач в случае, когда пределом решения при стремлении малого параметра к нулю является кратный корень вырожденного уравнения, качественно отличаются от разложений в случае простого корня. Эти отличия можно увидеть на примере краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1, \quad (2)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $f$  — достаточно гладкая функция. Известно, что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, 0) = 0 \quad (3)$$

имеет простой корень  $u = \varphi(x)$ , и  $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ , то при некоторых требованиях к граничным значениям  $u^0$  и  $u^1$  для достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (1), (2) с асимптотическим представлением

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \left( \bar{u}_i(x) + \Pi_i(\xi) + \tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}) \right) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (4)$$

где  $\bar{u}_0(x) = \varphi(x)$ ,  $\bar{u}_i(x)$  — коэффициенты регулярной части асимптотики;  $\xi = x/\varepsilon$  и  $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$  — погранслоевые переменные,  $\Pi_i(\xi)$  и  $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$  — пограничные функции, экспоненциально стремящиеся к нулю при  $\xi, \tilde{\xi} \rightarrow \infty$ .

Пусть функция  $f(u, x, \varepsilon)$  имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(x))^2 - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon),$$

где  $h(x) > 0$  на отрезке  $[0; 1]$ . В этом случае уравнение (3) имеет двукратный корень  $u = \varphi(x)$ . При определенных условиях, в том числе при условиях  $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0) > 0$ ,  $u^0 > \varphi(0)$ ,  $u^1 > \varphi(1)$ , задача (1), (2) имеет погранслоевое решение, пределом которого при  $\varepsilon \rightarrow 0$  на интервале  $(0; 1)$  является корень  $\varphi(x)$ , однако асимптотика этого решения качественно отличается от (4) [1].

Регулярная часть асимптотики является теперь рядом по целым степеням  $\sqrt{\varepsilon}$  (а не  $\varepsilon$ , как в (4)), а пограничные функции определяются нестандартным способом и зависят не только от погранслоевых переменных  $\xi = x/\varepsilon$  и  $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$ , но также и от  $\varepsilon$ . Например,  $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$  является решением задачи

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d\xi^2} = h(0) (\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon} \bar{u}_1(0) \Pi_0), \quad \xi > 0,$$

$$\Pi_0(0, \varepsilon) = u^0 - \varphi(0), \quad \Pi_0(\infty, \varepsilon) = 0,$$

где  $\bar{u}_1(0) = [h^{-1}(0)\bar{f}_1(0)]^{1/2} > 0$ .

Функция  $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$  находится в явном виде и, как показывает анализ, она описывает три зоны пограничного слоя в окрестности точки  $x = 0$ : в первой зоне  $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$  убывает с ростом  $\xi$  степенным образом, как  $\frac{1}{\xi^2}$ , потом следует вторая (переходная) зона, а затем (в третьей зоне)  $\Pi_0$  убывает экспоненциально, как  $\exp(-\kappa\zeta)$ , где  $\zeta = \varepsilon^{1/4}\xi$ , т.е. во второй зоне происходит изменение масштаба погранслошной переменной и характера убывания функции  $\Pi_0(\xi, \varepsilon)$ . Остальные пограничные функции также находятся в явном виде и ведут себя аналогичным образом. При этом пограничные ряды являются рядами по степеням  $\varepsilon^{1/4}$ .

Добавление в уравнение (1) члена  $\varepsilon A(x)\frac{du}{dx}$  и также замена граничных условий (2) на условия Неймана приводит к изменению характера асимптотики, в частности, к изменению масштабов погранслошных переменных.

Аналогичные сингулярно возмущенные задачи в случае кратного корня вырожденного уравнения исследованы для параболических [2] и эллиптических [3] уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бутузов В. Ф. Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94, Вып. 1. С. 68–80.
2. Бутузов В. Ф. О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, № 1. С. 44–55.
3. Белашапко В. А., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения // ЖВМиМФ. 2013. Т. 53, № 8. С. 65–75.

**О СИСТЕМЕ ТИХОНОВСКОГО ТИПА  
В СЛУЧАЕ КРАТНОГО КОРНЯ  
ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ**  
**ON A TYCHONOFF-TYPE SYSTEM  
IN THE CASE OF A MULTIPLE ROOT OF  
THE DEGENERATE EQUATION**

Бутузова М. В.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
физический факультет, Москва, Россия; m.butuzova@mail.ru*

Рассматривается начальная задача для системы тихоновского типа

$$\varepsilon z' = f(z, y, x, \varepsilon), \quad y' = g(z, y, x, \varepsilon), \quad 0 < x \leq X, \quad (1)$$

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (2)$$

$z$  и  $y$  — скалярные функции.

В классической теореме А.Н. Тихонова (см.[1]) рассматривается случай, когда вырожденное уравнение

$$f(z, y, x, 0) = 0 \quad (3)$$

имеет изолированный корень  $z = \varphi(y, x)$ , этот корень является устойчивым, т.е.  $f_z(\varphi(y, x), y, x, 0) < 0$ , и начальное значение  $z^0$  принадлежит области влияния этого корня. В этом случае при достаточной гладкости правых частей системы (1) задача (1), (2) имеет решение погранслоного типа с асимптотическим разложением вида

$$z(x, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^i (\bar{z}_i(x) + \Pi_i z(\xi)), \quad y(x, \varepsilon) = \sum_{i=0} \varepsilon^i (\bar{y}_i(x) + \Pi_i y(\xi)), \quad (4)$$

где  $\bar{z}_0(x) = \varphi(\bar{y}_0(x), x)$ ,  $\bar{y}_0(x)$  — решение задачи

$$\bar{y}'_0 = g(\varphi(\bar{y}_0, x), \bar{y}_0, x, 0), \quad \bar{y}_0(0) = y^0,$$

$\Pi_i z(\xi)$  и  $\Pi_i y(\xi)$  — функции пограничного слоя, экспоненциально убывающие при  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  — погранслоная переменная. Члены ряда (4) определяются последовательно с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой (см.[1]).

В докладе речь пойдет о задаче (1), (2) в том случае, когда функция  $f(z, y, x, \varepsilon)$  имеет вид

$$f(z, y, x, \varepsilon) = -h(y, x)(z - \varphi(y, x))^2 + \varepsilon f_1(z, y, x, \varepsilon), \quad (5)$$

где  $h(y, x) > 0$ , и, следовательно, уравнение (3) имеет двукратный корень  $z = \varphi(y, x)$ . В этом случае при определенных условиях задача (1), (2) также имеет решение погранслоного типа, но характер асимптотики качественно изменяется. Асимптотическое разложение решения производится теперь не по целым степеням  $\varepsilon$ , как в (4), а по степеням  $\sqrt{\varepsilon}$ , причем пограничные функции зависят не только от  $\xi = x/\varepsilon$ , но также и от  $\varepsilon$ , а характер их убывания при  $\xi \rightarrow \infty$  более сложный, чем в случае простого корня вырожденного уравнения. Оказывается, что в пограничном слое возникают три зоны: в первой зоне пограничные функции убывают при  $\xi \rightarrow \infty$  степенным образом, как  $\frac{c}{\xi}$ ; во второй зоне происходит изменение характера убывания и масштаба погранслоной переменной и, наконец, в третьей зоне пограничные функции убывают экспоненциально,

как  $\exp(-\kappa\zeta)$ , где  $\zeta = \sqrt{\varepsilon}\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Таким образом, погранслойные переменные  $\xi$  и  $\zeta$  в первой и третьей зонах имеют разные масштабы.

Еще одной особенностью случая двукратного корня вырожденного уравнения является то, что теперь важную роль играют слагаемые порядка  $\varepsilon$ , входящие в правую часть (5), а именно, для существования погранслойного решения с описанной асимптотикой требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$f_1(\bar{z}_0(x), \bar{y}_0(x), x, 0) - \bar{z}'_0(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Алгоритм построения асимптотического разложения определенным образом отличается от стандартного алгоритма А.Б. Васильевой.

Обоснование асимптотики проводится с помощью метода дифференциальных неравенств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М: Высшая школа, 1990.

## НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

## NON-CLASSICAL RELAXATION CYCLES OF SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

Глызин С. Д.<sup>1</sup>, Колесов А. Ю.<sup>2</sup>, Розов Н. Х.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; glyzin@uniyar.ac.ru

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; kolesov@uniyar.ac.ru

<sup>3</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Москва, Россия; fpo.mgu@mail.ru

Рассматривается специальный класс релаксационных систем с одной медленной и одной быстрой переменными

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = [g(x, y) - y(t - h)]y, \quad (1)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $h = \text{const} > 0$ ;  $f, g \in C^\infty(K)$ ,  $K = \{(x, y) : x > -\delta_0, y > -\delta_0\}$ ,  $\delta_0 > 0$ . В системе (1) медленная компонента  $x(t)$  описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, а быстрая  $y(t)$  – дифференциальным уравнением вольтерровского типа с запаздыванием  $h$  и малым параметром при производной.

Основная цель работы состоит в распространении теории неклассических релаксационных колебаний (см. [1]) на системы вида (1). Учитывая, что нас интересуют релаксационные циклы этой системы с  $\delta$ -образной компонентой  $y$ , то основные ограничения на функции  $f$  и  $g$  формулируются для больших значений  $y$  и при  $y = 0$ .

**Условие 1.** При  $y \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x$  из любого замкнутого и ограниченного подмножества полуоси  $x \geq 0$  справедливы асимптотические разложения

$$f(x, y) = y \left[ a_0(x) + \frac{a_1(x)}{y} + \frac{a_2(x)}{y^2} + \dots \right], \quad g(x, y) = b_0(x) + \frac{b_1(x)}{y} + \frac{b_2(x)}{y^2} + \dots, \quad (2)$$

верные при дифференцировании по  $x$ ,  $y$  в любом порядке и любое число раз.

**Условие 2.** Фигурирующие в (2) коэффициенты  $a_0(x)$ ,  $b_0(x)$  удовлетворяют неравенствам

$$a_0(x) > 0 \quad \forall x > 0; \quad b_0(x) > 0 \quad \text{при } x \in (0, q_1), \quad b_0(x) < 0 \quad \text{при } x > q_1,$$

где  $q_1$  – некоторая положительная постоянная.

**Условие 3.** Считаем, что  $f(x, 0) < 0 \quad \forall x > 0$ ,  $f(0, 0) = 0$ ;  
 $g(x, 0) > 0$  при  $0 \leq x < q_2$ ,  $g(x, 0) < 0$  при  $x > q_2$ , где  $q_2 = \text{const} > 0$ .

Для формулировки следующей серии ограничений нам потребуются функции

$$\gamma_0(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{b_0(s)}{a_0(s)} ds, \quad \gamma_1(x, x_1) = \int_{x_1}^x \frac{g(s, 0)}{f(s, 0)} ds.$$

**Условие 4.** Найдется такое  $x_0 = x_0^* \in (0, \min(q_1, q_2))$ , что уравнение

$$\gamma_0(x, x_0) = 0 \quad (3)$$

при  $x_0 = x_0^*$  допускает решение  $x = x_1^* > \max(q_1, q_2)$ .

Приведенное условие позволяет определить одномерное отображение, построение которого проведем в два этапа.

На первом этапе применим к уравнению (3) в точке  $(x, x_0) = (x_1^*, x_0^*)$  теорему о неявной функции по переменной  $x$ , условия которой здесь, как нетрудно показать, заведомо выполняются. Таким образом, из (3) однозначно определяется функция  $x = x_1(x_0)$ ,  $x_1(x_0^*) = x_1^*$ , причем

$$x_1(x_0) > \max(q_1, q_2) \quad \forall x_0 \in [a, b]. \quad (4)$$

Здесь  $[a, b] \subset (0, \min(q_1, q_2))$  – некоторый отрезок достаточно малой длины, имеющий  $x_0^*$  своей внутренней точкой. На втором этапе обратимся к уравнению

$$\gamma_1(x, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a_0(s)}, \quad (5)$$

считая, что  $x_0$  пробегает фигурирующий в (4) отрезок  $[a, b]$ , а  $x_1 = x_1(x_0)$  – функция из (4). Далее, нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) &> 0 \quad \text{при } x > q_2, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) < 0 \quad \text{при } x \in (0, q_2), \\ \gamma_1(x, x_1) &\rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (6)$$

А отсюда с учетом неравенства

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a_0(s)} > 0 \quad (7)$$

и оценки  $x_1 > q_2$  (см. (4)) заключаем, что уравнение (5) имеет на интервале  $0 < x < q_2$  единственное решение  $x = x_2(x_0)$ . Тем самым, на отрезке  $a \leq x_0 \leq b$  корректно определено одномерное отображение

$$x_0 \rightarrow \psi(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(x_0), \quad (8)$$

причем, как нетрудно проверить, справедливы свойства  $\psi'(x_0) > 0$ ,  $x_1'(x_0) < 0 \quad \forall x_0 \in [a, b]$ .

**Условие 5.** Предполагаем, что значение  $x_0 = x_0^*$  из условия 4 является экспоненциально устойчивой неподвижной точкой отображения (8), т. е.

$$\psi(x_0^*) = x_0^*, \quad \psi'(x_0^*) < 1.$$

Для формулировки ограничения на величину запаздывания  $h$  обратимся к аналогичному (5) уравнению

$$\gamma_1(x, x_1) = 0 \quad (9)$$

при  $x_1 = x_1(x_0)$ ,  $x_0 \in [a, b]$ . Из отмеченных выше свойств (6), (7) вытекает, что уравнение (9) имеет на интервале  $0 < x < q_2$  единственное решение  $x = x_3(x_0)$ , такое что  $x_3(x_0) > x_2(x_0) \quad \forall x_0 \in [a, b]$ .

**Условие 6.** Считаем, что

$$h < h_* \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{x_3^*}^{x_1^*} \frac{ds}{f(s, 0)}, \quad (10)$$

где  $x_3^* = x_3(x_0^*)$ .

Все перечисленные ограничения на  $f$ ,  $g$  относятся к случаям  $y \gg 1$  и  $y = 0$ . В свою очередь, заключительное условие представляет собой связующее звено между большими и малыми значениями  $y$ .

**Условие 7.** В точках  $x = x_0^*$  и  $x = x_1^*$ , о которых говорится в условии 4, имеют место неравенства

$$g(x_0^*, y) > 0, \quad g(x_1^*, y) < 0 \quad \forall y \geq 0. \quad (11)$$

Подчеркнем, что оценки (11) заведомо справедливы при  $y \ll 1$  и  $y \gg 1$ . При остальных же значениях  $y$  их выполнения приходится требовать.

Перейдем к вопросу о существовании у системы (1) экспоненциально орбитально устойчивого (в метрике фазового пространства  $\mathbb{R} \times C[-h, 0]$ ) релаксационного цикла импульсного типа. Перед формулировкой соответствующего утверждения введем в рассмотрение величины

$$T_* = - \int_{x_0^*}^{x_1^*} \frac{ds}{f(s, 0)} > h_*, \quad y_{\text{int}}^* = \int_{x_0^*}^{x_1^*} \frac{ds}{a_0(s)} > 0, \quad y_{\text{max}}^* = \gamma_0(q_1, x_0^*) > 0$$

и функцию  $x_*(t)$ , являющуюся решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=0} = x_1^*.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1 – 7. Тогда найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  у системы (1) существует экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл  $(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon))$  периода  $T_*(\varepsilon)$ , причем  $y_*(t, \varepsilon) > 0$ ,  $y_*(0, \varepsilon) \equiv 1$ . Для этого цикла справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_*(\varepsilon)} y_*(t, \varepsilon) dt = y_{\text{int}}^*,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t (\varepsilon y_*(t, \varepsilon)) = y_{\text{max}}^*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\delta_1 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta_2} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0$$

и оценка вида  $\max_{\delta_1 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta_2} y_*(t, \varepsilon) \leq M_1 \exp(-M_2/\varepsilon)$ ,  $M_1, M_2 = \text{const} > 0$ . Здесь  $t_*(\varepsilon) = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$  – первый положительный корень уравнения  $y_*(t, \varepsilon) = 1$ , а постоянные  $\delta_1, \delta_2 \in (0, T_*/2)$  произвольно фиксированы.

Тем самым установлено, что при выполнении условий 1 – 7 в системе (1) существует устойчивый релаксационный цикл, координата  $x_*(t, \varepsilon)$  которого при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходится поточечно к некоторой разрывной функции, а координата  $y_*(t, \varepsilon)$  является  $\delta$ -образной.

Полученные результаты иллюстрируются на ряде примеров из экологии и теории лазеров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колесов А.Ю. Специфические релаксационные циклы сингулярно возмущенных систем типа Лотки-Вольтерра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, № 3. С. 515 – 536.

## **О ПАРАДОКСАХ ПЕНЛЕВЕ ON PAINLEVÉ PARADOXES**

**Иванов А. П.**

*Московский физико-технический институт (госуниверситет),  
Долгопрудный МО, Россия; apivanov@orc.ru*

В 1895 году были опубликованы «Лекции о трении» [1], в которых П. Пенлеве привел, в частности, ряд примеров некорректности уравнений динамики систем с кулоновым трением. Эти примеры несуществования или неединственности решения, впоследствии названные парадоксами Пенлеве, обсуждались многими известными учеными, предложившими различные методы преодоления парадоксальных ситуаций. В докладе обсуждается современное состояние данной проблемы.

### *ЛИТЕРАТУРА*

1. Пенлеве П. Лекции о трении. М: Гостехтеориздат, 1954.

# УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЛАЗЕРНОЙ СИСТЕМЫ

## STABILITY OF AUTOMODEL SOLUTIONS OF ONE LASER SYSTEM

**Кащенко А. А.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; sa-ahr@yandex.ru*

Рассмотрим модель FDML лазера, предложенную А. Г. Владимировым,

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{A} + (1 - i\Delta)A &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-1)/2} A(t-1), \\ \varepsilon \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|A|^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все параметры действительные,  $0 < \kappa < 1$ ,  $\gamma > 0$ ,  $g_0 > 0$ ,  $\kappa e^{g_0} > 1$ , параметр  $\varepsilon$  положителен и достаточно мал  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Назовем  $\Gamma(\kappa, g_0)$  — множество точек  $(\rho^2, \delta)$ , удовлетворяющих равенству

$$\delta^2 = \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + \rho^2}\right) - 1.$$

Обозначим за  $\Omega$  корень уравнения

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{(1 - i\alpha)g_0}{2(1 + \rho^2)} - i\Omega\right),$$

принадлежащий полуинтервалу  $[0, 2\pi)$ . Обозначим за  $\theta = \theta(\varepsilon)$  такую функцию со значениями из полуинтервала  $[0, 2\pi)$ , что  $\theta + (\Delta + \delta)/\varepsilon$  нацело делится на  $2\pi$ .

**Теорема 1.** Пусть точка  $(\rho^2, \delta)$  принадлежит множеству  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Тогда для каждого натурального  $n$  существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  у системы (1) есть автомодельное решение

$$\begin{aligned} A &= (\rho + \varepsilon v) e^{i((\Delta + \delta)/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t}, \\ G &= \frac{g_0}{1 + (\rho + \varepsilon v)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $v(\varepsilon)$  и  $d(\varepsilon)$  ограничены при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Исследована устойчивость данных решений. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости отдельных решений и исследована геометрия областей устойчивости на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

1. При  $\alpha = 0$  удалось полностью решить задачу.

1.1. Доказано, что на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  может быть 0, 1, 2 или 3 области устойчивости.

1.2. Области устойчивости симметричны относительно оси  $\rho^2$ .

1.3. Область параметров  $(\kappa, g_0)$  аналитически разделена на подобласти, в которых на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$  содержится 0, 1, 2, 3 областей устойчивости.

2. В случае  $\alpha \neq 0$  динамика системы (1) богаче. В частности, на основе аналитических и численных исследований показано, что

2.1. Область устойчивости может быть как симметрична, так и несимметрична относительно оси  $\rho^2$ .

2.2. За счет изменения параметра  $\alpha$  можно стабилизировать (дестабилизировать) неустойчивое (устойчивое) при  $\alpha = 0$  решение.

2.3. Если  $\delta \neq 0$ , то существует такое  $\alpha_0 = \alpha_0(\delta)$ , что при всех  $\alpha$  таких, что  $|\alpha| > \alpha_0$ , решение (2) уравнения (1) неустойчиво.

**НОРМАЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМ  
И ОЧЕНЬ БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ  
NORMALIZATION OF EQUATION WITH LARGE  
AND VERY LARGE DELAY**

**Кащенко И. С.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; iliyask@uniyar.ac.ru*

Решается задача исследования локальной, в окрестности нулевого состояния равновесия, динамики дифференциального уравнения первого порядка с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t - T_1) + bx(t - T_2) + f(x, x(t - T_1), x(t - T_2)).$$

Основное предположение работы состоит в том, что оба запаздывания асимптотически велики, причем одно по порядку больше другого. Пусть выполнено

$$T_1 = \varepsilon^{-1}, \quad T_2 = (c\varepsilon^2)^{-1}, \quad c > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Нелинейную функцию  $f(x, y, z)$  для простоты будем считать зависящей только от первого аргумента:  $f(x, y, z) \equiv f(x)$ . В окрестности нуля ее удобно разложить в ряд Тейлора

$$f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$$

Заменой времени  $t \rightarrow t\varepsilon^{-1}$  перейдем к уравнению

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t - 1) + b(t - (c\varepsilon)^{-1}) + f(x). \quad (1)$$

Динамика системы (1) вблизи стационара в главном определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\varepsilon\lambda + 1 = a \exp(-\lambda) + b \exp(-\lambda(c\varepsilon)^{-1}). \quad (2)$$

При  $|a| + |b| < 1$  и достаточно малых  $\varepsilon$  все корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части, т.е. все решения (1) из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю. В случае  $|a| + |b| > 1$  и при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  уравнение (2) имеет корень с положительной вещественной частью, задача становится нелокальной — в малой (но не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нуля не существует устойчивых режимов.

Таким образом при  $|a| + |b| = 1$  возникает критический случай: у уравнения (2) не существует корней с положительной вещественной частью, и существуют корни, вещественная часть которых стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Как показано, таких корней бесконечно количество, т.е. мы имеем дело с критическим случаем бесконечной размерности.

Положим  $a = a_0 + \varepsilon^2 b_0 a_1$ ,  $b = b_0 + \varepsilon^2 b_0 b_1$ ,  $|a_0| + |b_0| = 1$ . Рассмотрим случай  $a_0 \geq 0$ ,  $b_0 > 0$ . Обозначим дополнительно через  $\theta(\varepsilon) \in [0, 1)$  значение, дополняющее  $(c\varepsilon)^{-1}$  до целого.

Представим  $x$  в виде формального асимптотического ряда

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 u(\tau, r, s) + \varepsilon^4 x_2(r, s, \tau) + \dots, \quad (3)$$

где  $\tau = c\varepsilon^3 t$ ,  $r = (1 + \varepsilon c\theta(\varepsilon) - \varepsilon^2 c b_0^{-1}(1 + a_0 c\theta(\varepsilon)) + \varepsilon^3 c b_0^{-1}(a_0 - c\theta(\varepsilon) + a_0^2 c^2 b_0^{-1} \theta(\varepsilon)))t$ ,  $s = \varepsilon(c - \varepsilon a_0 c^2 b_0^{-1} + \varepsilon^2(a_0^2 c^3 b_0^{-2} - c^2 b_0^{-1}))t$ , а  $x_2(r, s, \tau)$  периодична по первым двум аргументам с периодом 1.

Подставим (3) в (1) и будем последовательно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^4$  получим уравнение относительно  $x_2$ , необходимым и достаточным условием разрешимости которого в пространстве периодических функций будет следующая краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^2}{2b_0} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left( \frac{1}{2b_0^2} + \frac{2a_0 c \theta}{2b_0} + \frac{a_0 c^2 \theta^2}{2b_0} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0 c}{b_0} (1 + c\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + (a_1 + b_1)u + f_2 u^2, \quad (4)$$

$$u(\tau, r, s) = u(\tau, r + 1, s) = u(\tau, r, s + 1). \quad (5)$$

Краевая задача (4), (5) является квазинормальной формой для исходного уравнения (1) в рассматриваемом критическом случае.

**Теорема.** Пусть при некотором  $\theta = \theta_0$  уравнение (4), (5) имеет определенное при всех  $\tau \geq 0$  решение  $u_0(\tau, r, s)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (1) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $o(1)$  решение  $x_0(t, \varepsilon_k)$

$$x_0(t, \varepsilon_k) = \varepsilon_k^2 u_0(\varepsilon_k^2(1 + o(1))t, (1 + o(1))t, \varepsilon_k(1 + o(1))t),$$

где монотонно стремящаяся к нулю последовательность  $\varepsilon_k$  определяется из равенства  $\theta(\varepsilon_k) = \theta_0$ .

В оставшихся случаях аналогичные построения также имеют место. В качестве квазинормальной формы мы будем получать параболическое уравнение с двумя пространственными переменными, с периодическими или антипериодическими краевыми условиями, в зависимости от знаков  $a_0$  и  $b_0$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31128) и Гранта Президента РФ (№ 14.124.13.5948-МК).

**ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫМ  
УПРАВЛЕНИЕМ**

**THE DYNAMICS OF ONE EQUATION WITH SMALL  
SPACE-DISTRIBUTED CONTROL**

**Кащенко С. А.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; kasch@uniyar.ac.ru*

Исследуется влияние малого пространственно-неоднородного управления на динамику нелинейных систем уравнений. Особое внимание уделено изучению логистического уравнения с запаздыванием. Основное содержание доклада состоит из двух частей. В первой части рассмотрена ситуация, когда логистическое уравнение с запаздыванием имеет устойчивый релаксационный цикл. Показано, что результатом малого управляющего воздействия может быть появление сложных релаксационных объектов: большого числа различных аттракторов. Во второй части исследуется локальная динамика в окрестности состояния равновесия в случае, близком к критическому в задаче об устойчивости. Этот критический случай имеет „бесконечную“ размерность. Построены специальные квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет локальное поведение решений исходного уравнения. В заключении сформулированы некоторые результаты, полученные на основе численного анализа.

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ  
РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,  
МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДИНАМИКУ РУКИ  
ТЕЛЕСКОПИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА**

**OPTIMAL CONTROL OF THE BEHAVIOR OF  
SOLUTIONS OF INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM  
MODELING THE DYNAMICS OF THE HAND OF  
TELESCOPIC MANIPULATOR**

Кубышкин Е. П.<sup>1</sup>, Тряхов М. С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; kubysh@uniyar.ac.ru

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; mikhail.tryakhov@gmail.com

Рассматривается следующая нелинейная начально-краевая задача

$$J(l)\ddot{\theta} - \int_0^l (b+l-x_1)u_{tt}(x_1, t)dx_1 + 2i\dot{\theta}(b-l-1/2) = M(t), \quad (1)$$

$$\ddot{i} - \dot{\theta}^2(b+l-1/2) = F(t), \quad (2)$$

$$u_{tt} + u_{xxxx} = (b+l-x)\ddot{\theta} + 2i\dot{\theta}, \quad (3)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, u(l, t) = u_x(l, t) = 0, \quad (4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1, l(0) = l_0, \dot{l}(0) = l_1, u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x). (0 \leq x \leq l_0) \quad (5)$$

относительно функций  $\theta = \theta(t), l = l(t) > 0$  и  $u = u(x, t)$  области  $Q_{l,T} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , где  $M(t), F(t) \in L_2(0, T), J(l) = J_0 + 1/3 + (b+l)[(b+l)-1] > 0, J_0$  и  $b$  положительные параметры.

Начально-краевая задача (1) - (5) приведена в безразмерных переменных и описывает динамику руки телескопического манипулятора. Рука обладает упругими свойствами, имеет длину  $l(t)$  и может одновременно совершать поворот и прямолинейное движение под действием момента внешних сил  $M(t)$  и силы  $F(t)$ . Вывод уравнений (1) - (3) имеется, например, в монографии [1].

Для начально-краевой задачи (1) - (5) сформулировано понятие обобщенного решения с введением соответствующих функциональных пространств и интегрального соотношения, определяющего обобщенное решение. Доказаны теорема существования и единственности решения, теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения, обеспечивающие корректность поставленной начально-краевой задачи. Предложен итерационный алгоритм построения обобщенного решения как последовательности решений линейных начально-краевых задач с переменной границей, решение которых рассмотрено в работе [2].

Для начально-краевой задачи (1) - (5) решены следующие задачи оптимального управления.

**Задача 1.** Определить функции  $M(t), F(t) \in L_2(0, T)$ , переводящие решение начально-краевой задачи (1) - (5) из начального положения (5) в конечное

$$\theta(T) = \theta_{0T}, \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, l(0) = l_{0T}, \dot{l}(0) = l_{1T}, u(x, T) = u_{0T}(x), u_t(x, T) = u_{1T}(x) \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq l_T \equiv l(T))$$

в заданный момент времени  $T$  и минимизирующие функционал

$$\Phi(M, F) = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|F(t)\|_{L_2(0,T)}^2.$$

**Задача 2 (задача быстрогодействия).** Определить функции  $M(t), F(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\Phi(M, F) \leq L < \infty$ , переводящие решение начально-краевой задачи (1) - (5) из (5) в (6) за минимальное время  $T$ .

При решении задач 1,2 доказана управляемость решениями начально-краевой задачи (1) - (5), сформулирован принцип максимума, предложен итерационный алгоритм построения оптимального управления, основанный на решении задач управления для рекуррентной последовательности линейных начально-краевых задач. Для этого используется методика работы [3], основанная на сведении задач управления поведением решений начально-краевых задач для гибридных систем дифференциальных уравнений к проблеме моментов в соответствующих функциональных пространствах. Минимальное время  $T$ , при этом, находится итерационно как корень некоторого нелинейного уравнения. Проведен численный эксперимент для различных характерных значений параметров (1) - (3), начальных и конечных условий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.
2. Тряхов М. С. Построение обобщенного решения одной начально-краевой задачи с переменной границей // Вестник ННГУ ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5(2). С.219–221.
3. Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ. 1992. Т. 56, № 2. С. 240–249.

## СЦЕНАРИЙ ЛАНДАУ-ХОПФА И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

### LANDAU-HOPF SCENARIO AND SOME PROBLEMS FROM THE THEORY OF THE ELASTIC STABILITY

Куликов А. Н.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; anat\_kulikov@mail.ru

Широко известен сценарий перехода к турбулентности, предложенный Ландау [1,2]. Аналогичный сценарий был предложен Хопфом. В работе [3] приведен пример его реализации. Ниже приведена нелинейная краевая задача, которая может служить математической моделью колебаний трубы, транспортирующей жидкость, а также колебаний тонкого цилиндра в осесимметричном потоке жидкости. Эта математическая модель была предложена в работах М. Паудосиса, Ф. Холмса, Дж. Марсдена (см., например, [4], а также список литературы в этой монографии).

После перенормировок интересующая нас краевая задача может быть записана в следующем виде [5-6]

$$w_{tt} + w_{xxxx} + 2\varepsilon^2\kappa_1 w_t + 2\varepsilon^2\kappa_2 w_{txxxx} + \varepsilon^2\gamma[w_x + (x-1)w_{xx}] + \varepsilon c^2 w_{xx} + \varepsilon\beta c w_{tx} + \varepsilon\alpha c^2 w_x = \varepsilon^2 w_{xx} \left[ \alpha_1 \int_0^1 w_x^2 dx + \alpha_2 \int_0^1 w_x w_{xt} dx \right], \quad (1)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa_1, \kappa_2, \gamma, c, \beta, \alpha, \alpha_1, \alpha_2$  – положительные постоянные,  $\varepsilon$  – малый неотрицательный параметр. Нелинейная краевая задача (1),(2) имеет состояние равновесия  $w = 0$ , для исследования устойчивости которого в первом приближении следует рассмотреть линеаризованную в нуле краевую задачу. Для этого необходимо рассмотреть уравнение (1), в котором его правая часть заменена на 0.

**Теорема 1.** *Спектр устойчивости линеаризованной краевой задачи (1), (2) содержит счетное множество собственных значений  $\{\lambda_n, \bar{\lambda}_n\}, n \in N$ . При  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , где  $\varepsilon_0$  достаточно мало и  $n = 0, 1, 2, \dots, n_0$  эта краевая задача имеет следующие точки спектра устойчивости*

$$\lambda_n(\varepsilon) = \tau_n(\varepsilon) + i\sigma_n(\varepsilon), \quad \tau_n(\varepsilon) = [-(\kappa_1 + (\pi n)^4 \kappa_2) + \alpha c^3 \beta (\pi n - 4R_n) / (8(\pi n)^3)] \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \sigma_n(\varepsilon) = (\pi n)^2 - \varepsilon c^2 / 2 + O(\varepsilon^2), \quad R_n = (\operatorname{ch} \pi n - \cos \pi n) / \operatorname{sh} \pi n.$$

Остальные  $\lambda_n (n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots)$  лежат в полуплоскости

$$\tau_n = \operatorname{Re} \lambda_n \leq -\lambda_0, \quad \lambda_0 > 0.$$

Задача исследования структуры окрестности нулевого решения может быть сведена к рассмотрению аналогичного вопроса для системы из  $n_0$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_n = \varepsilon^2 [\tau_n - b_n \rho_n^2] \rho_n, \quad b_n = \alpha_2 (\pi n)^4 / 2, \quad \rho_n(t) \geq 0, \quad n = 1, \dots, n_0. \quad (3)$$

**Лемма.** *При  $c \in (c_m, c_{m+1})$ , где*

$$c_m = 2\pi m \left[ \frac{(\kappa_1 + \kappa_2 (\pi m)^2)}{\alpha \beta (\pi m - 4R_m)} \right]^{1/3} \quad (m = 2, 3, \dots)$$

справедливы неравенства  $\tau_2 > 0, \tau_3 > 0, \dots, \tau_m > 0$ , а для остальных индексов  $j$  справедливы неравенства  $\tau_j < 0$ . При этом система дифференциальных уравнений (3) имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия  $S_{m-1}$ :

$$\rho_k = \sqrt{\tau_k/b_k}, \rho_j = 0, k = 2, 3, \dots, m, j = 1, m+1, \dots, n_0.$$

Остальные состояния равновесия (3) неустойчивы.

**Теорема 2.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  состоянию равновесия  $S_{m-1}$  соответствует асимптотически устойчивый инвариантный тор  $T_{m-1}(\varepsilon)$  размерности  $m-1$ . Остальным состояниям равновесия  $S_j (j \neq m-1)$  соответствуют неустойчивые торы краевой задачи (1), (2).

Из теоремы 2 вытекает, что при  $c \in (c_m, c_{m+1})$  асимптотически устойчивым может быть лишь тор  $T_{m-1}(\varepsilon)$ . Если  $c$  переходит из полуинтервала  $(c_m, c_{m+1}]$  в следующий  $(c_{m+1}, c_{m+2}]$ , то тор  $T_{m-1}(\varepsilon)$  теряет устойчивость, но одновременно рождается устойчивый тор  $T_m(\varepsilon)$ , размерность которого выше на 1 [5,6].

Аналогичная краевая задача была изучена в работе [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н. Гидродинамика. Москва: Наука, 1988.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. Москва: Физматлит, 2005.
3. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // Comm. Pure. Appl. Math. 1948. № 1. P. 303–322.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
5. Куликов А. Н. Турбулентность Ландау в задаче о флаттере трубы // Тезисы докладов X международного семинара им. Е.С. Пятницкого. Москва: Издательство, 2008. С. 156–158.
6. Куликов А. Н. О реализации сценария Ландау-Хопфа перехода к турбулентности в некоторых задачах теории упругой устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1278–1291.
7. Куликов А. Н. Аттракторы двух краевых задач для модифицированного телеграфного уравнения // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 57–68.

УРАВНЕНИЕ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО.  
 БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ  
 EQUATION OF KURAMOTO-SIVASHINSKY.  
 BIFURCATION PROBLEMS

Куликов А. Н.<sup>1</sup>, Куликов Д. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
 Ярославль, Россия; anat\_kulikov@mail.ru

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
 Ярославль, Россия; kulikov\_d\_a@mail.ru

Уравнение Курамото-Сивашинского или такие уравнения, которые к нему могут быть сведены, встречаются во многих разделах физики (гидродинамике, физике твердого тела). Последнее время это уравнение приобрело дополнительную популярность в связи с проблемами, возникающими в области нанотехнологий. К ним, например, приводят задачи при моделировании формирования нанорельефа на плоской поверхности мишени при обработке ее потоком ионов [1,2]. В наиболее простом варианте, когда деформации "цилиндрические" и поток перпендикулярен к невозмущенной поверхности обработки, рассматривают уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} + au_x^2 + b_2u_xu_{xx} + a_3u_x^3 + b_3u_x^2u_{xx}, \quad (1)$$

где  $u = u(t, x)$ ,  $a_2, b_2, b_3, a_3 \in R, b \geq 0$ . Иногда это уравнение называют уравнением Бредли-Харпера. Как правило, его рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями [2-4]. Например,

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), x \in R. \quad (2)$$

С физической точки зрения для задач из области нанотехнологий, микроэлектроники содержательны следующие краевые условия

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 1) = 0, x \in [0, 1]. \quad (3)$$

Целесообразно отметить, что обе краевые задачи ((1),(2) и (1), (3)) допускают решения  $u(t, x) = const$  и более того они инварианты относительно замен  $u \rightarrow u + const$ . Поэтому с физической и математической точек зрения разумно ограничиться изучением окрестности однородного состояния равновесия  $u = 0$ .

Рассмотрим линеаризованное в нуле дифференциальное уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx}. \quad (4)$$

Справедливы утверждения.

**Лемма 1.** Спектру устойчивости краевой задачи (4),(2) принадлежит собственное число  $\lambda = 0$ . При  $b \leq 1$  все решения этой краевой задачи устойчивы и неустойчивы при  $b > 1$ . Если  $b \neq 1$ , то  $\lambda = 0$  однократно и оно двукратно при  $b = 1$ .

**Лемма 2.** Спектру устойчивости краевой задачи (4),(3) принадлежит собственное число  $\lambda = 0$ . При  $b = 4\pi^2$  оно трехкратно и двукратно при остальных  $b$ . Если  $b < 4\pi^2$ , то все решения краевой задачи (4), (3) устойчивы и неустойчивы при  $b \geq 4\pi^2$ .

Для нелинейных краевых задач (1), (2) и (1), (3) были рассмотрены вопросы о возможности бифуркаций пространственно неоднородных решений, в том числе и устойчивых. Показано, что бифуркации таких решений происходят при смене устойчивости решений линеаризованных краевых задач (4), (2) и (4), (3). Так, если обратиться к краевой

задаче (1), (2) и положить  $b = 1 + \alpha\varepsilon$ , где  $\alpha \in R$ ,  $\varepsilon$  – малый неотрицательный параметр, то изучение структуры окрестности решения  $u = 0$  может быть сведено к исследованию системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений – нормальной форме

$$\dot{\psi} = \varepsilon l_0 |z|^2, \quad \dot{z} = \varepsilon [\alpha z - (l_1 + il_2)z|z|^2],$$

где  $l_0, l_1, l_2, \psi(t) \in R, z(t) \in C$ . Исследование нормальной формы позволило найти пространственно неоднородные решения краевой задачи (1), (2), исследовать их устойчивость, а также для таких решений могут быть выписаны асимптотические формулы по степеням малого параметра  $\varepsilon$ .

Аналогичные результаты могут быть получены и для краевой задачи (1), (3). Уместно отметить специфику нелинейной краевой задачи (1), (3). При всех  $b \in R$  данная краевая задача имеет двумерное инвариантное многообразие, составленное из неустойчивых решений. Более того, можно указать множество параметров задачи (1), (3), при которых это инвариантное многообразие окажется локальным аттрактором для решений данной краевой задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-2298.2013.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bradley R. M., Harper J. M. Theory of ripple topography induced by ion bombardement // J. Vac. Sci. Technol. 1988. V. A6. P. 2390–2395.
2. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1, № 2. С. 151–158.
3. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волновых наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 930–945.
4. Метлицкая А. В., Куликов А. Н., Рудый А. С. Механизм формирования волнового нанорельефа при эрозии поверхности ионной бомбардировкой в рамках модели Бредли-Харпера // Микроэлектроника. 2013. Т. 42, № 4. С. 298–305.

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ  
В ЗАДАЧАХ О ДИНАМИКЕ  
СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**  
**SELF-SIMILAR PERIODIC SOLUTIONS  
IN THE PROBLEMS OF THE DYNAMIC  
OF COUPLED OSCILLATORS**

**Куликов Д. А.**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; kulikov\_d\_a@mail.ru*

Рассмотрены задачи о взаимодействии двух или трех идентичных слабосвязанных осцилляторов (см., например, [1]). В первом случае рассматривается система из двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_k - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_k + \omega^2 x_k + f(x_k, \dot{x}_k) + (-1)^{k+1}[\beta\varepsilon(x_1 - x_2) + \gamma\varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] = 0, \quad (1)$$

где  $k = 1, 2, \alpha, \omega, \beta, \gamma \in R, \omega \neq 0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,

$$f(y, z) = f_2(y, z) + f_3(y, z) + f_0(y, z), \\ f_2(y, z) = f_{21}y^2 + f_{22}yz + f_{23}z^2, \quad f_3(y, z) = f_{31}y^3 + f_{32}y^2z + f_{33}yz^2 + f_{34}z^3,$$

а для  $f_0$  справедлива оценка  $|f_0(y, z)| \leq V(y^4 + z^4)$ , если  $|y|, |z| \leq M_1, M, M_1 = const > 0$ .

Система дифференциальных уравнений (1) включает в себя широко известные примеры: систему двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля-Дюффинга, систему из двух слабосвязанных физических маятников при малом коэффициенте трения ( $\varepsilon < 0$ .)

Сразу отметим, что будем различать три типа периодических решений:

1.  $x_1(t) = x_2(t)$  – синхронный цикл;
2.  $x_2(t) = -x_1(t)$  – противофазный цикл;
3.  $|x_1(t)| \neq |x_2(t)|$  – асимметричный цикл.

Здесь  $x_j(t)$  периодические функции. В работах [2,3] были изучены вопросы существования и устойчивости периодических решений всех трех типов. Были изучены и локальные бифуркации при смене устойчивости у всех трех типов периодических решений. Изучение отмеченных вопросов основано на использовании аппарата теории нормальных форм, для построения которых был использован алгоритм, ведущий свое начало от известного алгоритма Крылова-Боголюбова.

Как показано в работах [2,3], нормальная форма системы дифференциальных уравнений (1) имеет после перенормировок следующий вид

$$\xi' = d \exp(-i\varphi) D \xi + \xi - (1 + ic)\xi|\xi|^2, \quad (2)$$

где  $\varphi, c, d \in R, d > 0, \xi = col(\xi_1, \xi_2), |\xi|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \xi_j = \xi_j(s) \in C, j = 1, 2, s = \varepsilon t$ . Коэффициенты дифференциального уравнения (2) определяются в процессе реализации построения нормальной формы.

В работе [4] была предложена система из трех слабосвязанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_1 + x_1 + f(x_1, \dot{x}_1) + \varepsilon\beta(x_2 - x_1) + \varepsilon\gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_2 + x_2 + f(x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon\beta(x_1 - x_2) + \varepsilon\beta(x_3 - x_2) + \\ &+ \varepsilon\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon\gamma(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \ddot{x}_3 - 2\varepsilon\alpha\dot{x}_3 + x_3 + f(x_3, \dot{x}_3) + \varepsilon\beta(x_2 - x_3) + \varepsilon\gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0$  – достаточно малая положительная постоянная. Нелинейность  $f(y, z)$  аналогична той, которая была рассмотрена в случае двух осцилляторов. Изучение малых автоколебаний системы (3) можно свести к исследованию нормальной формы, которая после перенормировок может быть записана в форме

$$\begin{aligned} z_1' &= d \exp(-i\varphi)(z_2 - z_1) + z_1 - (1 + ic)z_1|z_1|^2, \\ z_2' &= d \exp(-i\varphi)(z_1 + z_3 - 2z_2) + z_2 - (1 + ic)z_2|z_2|^2, \\ z_3' &= d \exp(-i\varphi)(z_2 - z_3) + z_3 - (1 + ic)z_3|z_3|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $z_j = z_j(s), s = \varepsilon, d > 0, \varphi, c \in R$ .

У системы дифференциальных уравнений (4) и, следовательно, у системы дифференциальных уравнений (3) были найдены и исследована устойчивость автомодельных периодических решений:

1. синхронных периодических решений  $x_1(s) = x_2(s) = x_3(s)$ ;
2. асимметричных периодических решений, для которых  $|x_j(s)| \neq |x_k(s)|$  хотя бы для одной пары индексов.

Отметим, что при  $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta = 0$  синхронный цикл системы (3) существует и устойчив при любом выборе остальных параметров системы (1), а асимметричные циклы, если и существуют то с необходимостью они неустойчивы. Основные результаты получены аналитически.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-2298.2013.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
2. Куликов Д. А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух связанных осцилляторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. № 5. С. 120–132.
3. Куликов Д. А. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в двух слабосвязанных осцилляторов // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. С. 543–559.
4. Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация и многочастотные колебания в системе фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика. 2010. № 4. Т. 6, №4. С. 693–717.

**ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЯ РЕШЕНИЙ  
АДИАБАТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

**FEATURES OF OSCILLATIONS IN ADIABATIC  
OSCILLATORS WITH DELAY**

Нестеров П. Н.<sup>1</sup>, Агафончиков Е. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; nesterov.pn@gmail.com

<sup>2</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль, Россия; agafonchikov-evg@mail.ru

В докладе обсуждаются особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) + q(t)x(t-h) = 0, \quad (1)$$

где  $h > 0$ , а функция  $q(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . В частности, излагаются полученные авторами результаты о влиянии запаздывания на скорость роста (убывания) амплитуды этих колебаний. Отмеченные задачи рассматриваются на примере уравнения (1) с функциями  $q(t)$  вида

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho}, \quad a \neq 0, \quad (2)$$

и

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \quad a \neq 0, \lambda \neq 0, \quad (3)$$

где  $a, \lambda, \rho$  — вещественные числа и  $\rho > 0$ .

Анализ динамики решений уравнений (1), (2) и (1), (3) основан на использовании метода асимптотического интегрирования, предложенного в работе [1]. Суть метода состоит в следующем. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t-h), \quad x \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Здесь  $(n \times n)$ -матрица  $A(t)$  является или  $T$ -периодической или состоит из тригонометрических многочленов. Скалярная функция  $v(t)$  абсолютно непрерывна на интервале  $[t_0, \infty)$  и обладает следующими свойствами:  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;  $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ ;  $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ .

В работе [1] показано, что решения системы (4) при достаточно больших  $t$  удовлетворяют системе уравнений с запаздыванием

$$\dot{x} = \left[ v(t)A_1(t) + v^2(t)A_2(t) + \dots + v^k(t)A_k(t) \right] x(t) + R(t, x_t). \quad (5)$$

Здесь  $(n \times n)$ -матрицы  $A_j(t)$  являются или  $T$ -периодическими или их элементами являются тригонометрические многочлены в зависимости от типа исходной матрицы  $A(t)$ . В частности,

$$A_1(t) = A(t), \quad A_2(t) = -A(t) \int_{t-h}^t A(s) ds, \quad A_3(t) = A(t) \int_{t-h}^t A(s) \int_{s-h}^t A(\tau) d\tau ds.$$

Далее,  $R(t, \cdot)$  — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства  $C_{(k+1)h} \equiv C([- (k+1)h, 0], \mathbb{C}^n)$  непрерывных на отрезке  $[- (k+1)h, 0]$  функций со значениями в  $\mathbb{C}^n$  в пространство  $\mathbb{C}^n$ , а  $x_t(\theta) = x(t+\theta)$  ( $- (k+1)h \leq \theta \leq 0$ ) — элемент пространства  $C_{(k+1)h}$ . Кроме того, существует скалярная функция  $\gamma(t) \in L_1[t_0 + kh, \infty)$  такая, что

$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|$  для любой  $\varphi \in C_{(k+1)h}$  при  $t \geq t_0 + kh$  ( $\|\varphi\| = \sup_{-(k+1)h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ ). Операторы с таким свойством будем называть операторами из класса  $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$ .

Дальнейшее преобразование системы (5) состоит в использовании специальной замены переменных (см., например, [2]) для приведения этой системы при достаточно больших  $t$  к усредненному виду

$$\dot{y} = \left[ v(t)A_1 + v^2(t)A_2 + \dots + v^k(t)A_k \right] y(t) + R_1(t, y_t). \quad (6)$$

Здесь матрицы  $A_j$  являются постоянными матрицами, а  $R_1(t, y_t)$  — некоторый оператор из класса  $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$ . В частности,

$$A_1 = M[A_1(t)], \quad A_2 = M[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)], \quad \left( M[F(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s) ds \right)$$

где матрица  $Y_1(t)$  с нулевым средним значением определяется как решение матричного дифференциального уравнения вида:  $\dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1$ .

На завершающем этапе система (6) (если это оказывается возможным) приводится к так называемому  $\mathcal{L}$ -диагональному виду

$$\dot{z} = \Lambda(t)z(t) + R(t, z_t). \quad (7)$$

Здесь  $z_t$  — элемент пространства  $C_{(k+1)h}$ ,  $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$  — диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на  $[t_0, \infty)$  функции со значениями в  $\mathbb{C}$ , и  $R(t, \cdot)$  — линейный ограниченный оператор из класса  $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$ . Асимптотика всех решений системы (7) при  $t \rightarrow \infty$  может быть затем построена с помощью варианта теоремы Н. Левинсона, полученного в работе [3].

В завершение доклада на примере уравнения (1) с функцией

$$q(t) = a \frac{\sin \varphi(t)}{\sqrt{t}}, \quad \varphi(t) = t + \alpha \ln t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

иллюстрируются особенности параметрического резонанса в адиабатических осцилляторах с запаздыванием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004 мол\_а, а также гранта Президента Российской Федерации № МК-80.2013.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. 2013. Vol. 171, No. 2. P. 217–240.
2. Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.
3. Cassel J.S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. London Math. Soc. 1993. Vol. 47. P. 473–483.

**ON PAINLEVÉ'S EXTENSION TO BRUNS' THEOREM  
OF NON-EXISTENCE OF FIRST INTEGRALS  
IN THE 3-BODY PROBLEM**

**Albouy A.**

*The Institut de mécanique celeste et de calcul des éphémérides,  
Paris, France; [albouy@imcce.fr](mailto:albouy@imcce.fr)*

I will examine Painlevé's arguments in his 1898 paper in Bulletin Astronomique, and in particular the interesting use he made of Appell's ideas on the central projection in Newtonian dynamics (Appell's theory can be called projective dynamics). I will give a shorter proof of one of Painlevé's lemmas, and indicate the main difficulties I found in understanding the continuation of his paper. I will use unpublished works by Thierry Combot on the question.



where  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$  is angular momentum of the system relative to the point of contact.

*REFERENCES*

1. *Wagner V.*, "On the Geometrical Interpretation of the Motion of Nonholonomic Dynamical Systems", Trudy Seminara po vekt. i tenz. anal., No. 5, 301–327 (1941).
2. *Kharlamov A. P., Kharlamov M. P.*, "Nonholonomic joint", МТТ, No. 27, 1–7 (1995).

## **THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF A CHAPLYGIN BALL BY INTERNAL ROTORS**

**Bolotin S. V.**

*Moscow Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia; bolotin@mi.ras.ru*

We study the problem of optimal control of a Chaplygin ball on a plane by means of 3 internal rotors. By fixing the value of Markeev first integral, the problem is reduced to the Carateodori geodesic problem. Using Pontryagin maximum principle, the extremals are represented by a Hamiltonian system in group variables. For a spherically symmetric ball, the solutions can be expressed in elliptic functions.

## TOPOLOGICAL MONODROMY IN NONHOLONOMIC SYSTEMS

**Bolsinov A. V.<sup>1</sup>, Kilin A. A.<sup>2</sup>, Kazakov A. O.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*School of Mathematics, Loughborough University, Loughborough, United Kingdom;  
Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles, Izhevsk, Russia;*

*A.Bolsinov@lboro.ac.uk*

<sup>2</sup>*Inst. of Computer Science, Izhevsk, Russia; aka@rcd.ru*

<sup>3</sup>*Inst. of Computer Science, Izhevsk, Russia; kazakovdz@yandex.ru*

The phenomenon of a topological monodromy in integrable Hamiltonian and nonholonomic systems is discussed. An efficient method for computing and visualizing the monodromy is developed. The comparative analysis of the topological monodromy is given for the rolling ellipsoid of revolution problem in two cases, namely, on a smooth and on a rough plane. The first of these systems is Hamiltonian, the second is nonholonomic. We show that, from the viewpoint of monodromy, there is no difference between the two systems, and thus disprove the conjecture by Cushman and Duistermaat stating that the topological monodromy gives a topological obstruction for Hamiltonization of the rolling ellipsoid of revolution on a rough plane.

## ON THE DYNAMICS AND CONTROL OF CHAPLYGIN BALL

Borisov A. V.<sup>1</sup>, Kilin A. A.<sup>2</sup>, Mamaev I. S.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Computer Science; Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles, Udmurt State University, Izhevsk, Russia; borisov@rcd.ru*

<sup>2</sup>*Institute of Computer Science; Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles, Udmurt State University, Izhevsk, Russia; aka@rcd.ru*

<sup>3</sup>*Institute of Computer Science; Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles, Udmurt State University, Izhevsk, Russia; mamaev@rcd.ru*

We consider the rolling of a dynamically asymmetric balanced ball (the center of mass coincides with the geometric center) on a plane (Fig. 1). We adopt the following assumptions:

- the center of mass of the sphere + rotors system is located at the geometric center of the sphere;
- all the rotors are identical, possess axial symmetry and their spinning directions are aligned with their axes of symmetry, meaning that the rotors cannot change the mass distribution;
- the spinning directions of the rotors are non-coplanar, their angular velocities  $\omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  are given functions of time.

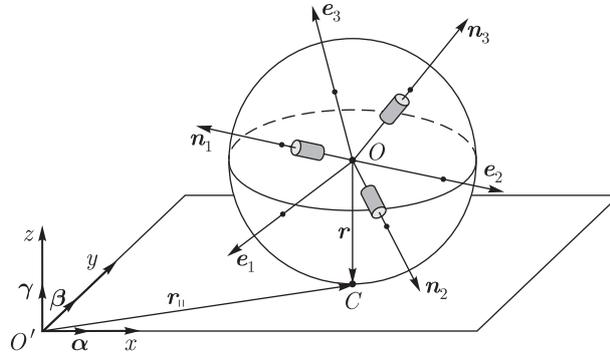


Fig. 1. Sphere with three rotors on a plane

Choose a body-fixed frame  $Oe_xe_ye_z$  whose axes are aligned with the principal axes of inertia of the ball (see Fig. 1). We shall parametrize the relative rotation of the axes by the orthogonal matrix  $\mathbf{Q} \in SO(3)$ , assuming that the coordinates of the moving vectors  $e_1, e_2, e_3$  in the fixed axes  $e_x, e_y, e_z$  lie on the matrix rows:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix}.$$

Let  $\mathbf{r}_|| = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  denote the coordinates of the center of mass of the ball  $C$  relative to the fixed coordinate system. Thus, the configuration space of the system is  $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$ , and the pair  $(\mathbf{r}_||, \mathbf{Q})$  uniquely defines the position and orientation of the ball.

Let  $\mathbf{V}$  be the velocity of the ball's center and  $\mathbf{\Omega}$  its angular velocity. Then the equations of motion expressing the balance principles of linear and angular momentum of the system can be represented as

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}, \quad (\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{\Omega} + \mathbf{K})\dot{\phantom{\mathbf{\Omega}}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{R} = -ae_z$  is the vector from the center of mass to the point of contact,  $\mathbf{K}$  is the gyroscopic momentum of the rotors,  $\tilde{\mathbf{I}}$  is the tensor of inertia of the ball relative to the center of mass in the fixed axes, it is related to the mass moment of inertia tensor  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  by

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{I} \mathbf{Q}. \quad (2)$$

In order for the velocity of the center to remain parallel to the plane, i.e.  $V_z \equiv 0$ , we shall assume that in Eqs. (1) the force also satisfies the condition  $F_z \equiv 0$ .

These equations must be supplemented with kinematic relations governing the rotation of the moving axes and the motion of the center of mass. They can be represented in matrix and scalar form as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{\Omega}}, \quad \tilde{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y. \end{aligned} \quad (3)$$

The system of equations (1) and (3) admits a vector integral, which is the angular momentum relative to the point of contact:

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{\Omega} + \mathbf{K} + m\mathbf{V} \times \mathbf{R} = \text{const}. \quad (4)$$

The presence of this integral substantially simplifies the control of the ball along the prescribed trajectory.

In this work we investigate:

- the controllability of the ball with non-slip condition at the point of contact;
- the controllability of the ball in the presence of friction;
- the problem of existence and stability of dissipation-free periodic solutions for a free ball in presence of friction;
- the problem of unbounded motion of a free ball.

#### REFERENCES

1. *Chaplygin, S. A.*, "On a Ball's Rolling on a Horizontal Plane", *Math. Sb.*, **24**, No. 1, 139–168 (1903) [*Regul. Chaotic Dyn.*, **7**, No. 2, 131–148 (2002)].
2. *Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.*, "How to control Chaplygin's sphere using rotors", *Regul. Chaotic Dyn.*, **17**, Nos. 3–4, 258–272 (2012).
3. *Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.*, "How to control Chaplygin's sphere using rotors. II", *Regul. Chaotic Dyn.*, **18**, Nos. 1–2, 144–158 (2013).
4. *Kilin A. A.*, "The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis", *Regul. Chaotic Dyn.*, **6**, No. 3, 291–306 (2001).

## ON THE MOTION OF A ROLLING DISK

**Borisov A. V.<sup>1</sup>, Mamaev I. S.<sup>2</sup>, Kilin A. A.<sup>3</sup>, Karavaev Yu. L.<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; borisov@rcd.ru*

<sup>2</sup>*Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; mamaev@rcd.ru*

<sup>3</sup>*Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; aka@rcd.ru*

<sup>4</sup>*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia; karavaev\_yury@istu.ru*

The paper presents experimental investigation of a homogeneous circular disk rolling on a horizontal plane. In nonholonomic mechanics (when the disk is rolling on a rough surface) the problem of a rolling disk was investigated by P. Appel, D. Korteweg, S.A. Chaplygin and others. A detailed review of the works devoted to the derivation of equations of motion and their integrability is presented in [1]. But due to presence of real dissipation mechanisms the nonholonomic formulation of the problem, can not explain the existence of two experimental effects accompanying the rolling of the disk: increase in acoustic frequencies and abrupt halt. Recently, some authors refer to the homogeneous circular disk rolling on a horizontal plane as Euler’s disk [2]. Recent papers, a detailed review of which is presented in [3], are devoted to the theoretical and experimental investigation of these phenomena taking into account mechanisms of energy dissipation due to viscous or dry friction forces, viscous air resistance, as well as partial disk deformation. However, the authors have not provided definitive explanation of these phenomena, but they have achieved the correlation of modeling results only on individual intervals of motion of the disk. There have been only theoretical studies on the abrupt halt of the rolling disk so far. For example in [4] the sign of reaction is checked for various friction laws and then the possibility of the contact loss of the disk is discussed, in [5, 6], the authors assume that an abrupt halt of the disk occurs as a result of the disk losing contact with the surface in the process of vibration at a small inclination angle.

In this paper two methods of experimental determination of the loss of contact between the rolling disk and the horizontal surface before the abrupt halt are proposed. Experimental results for disks of different masses and different materials are presented. The reasons for “micro losses” of contact with surface revealed during the rolling are discussed.

### REFERENCES

1. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., “Dynamics of rolling disk”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**, No. 2, 201–212 (2003).
2. <http://eulersdisk.com/History.pdf>
3. Leine R. I., “Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion”, *Arch. Appl. Mech.*, **79**, 1063–1082 (2009).
4. Ivanov A. P., “On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **13**, No. 4, 355–368 (2008).
5. Kessler P., O’Reilly O. M., “The ringing of Euler’s disk”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **7**, No. 1, 49–61 (2002).
6. Villanueva R., Epstein M., “Vibrations of Euler’s disk”, *Phys. Rev. E* **71**, 066609 (2005).

## POINT VORTICES, MULTI-PARTICLE SYSTEMS, AND POLYNOMIALS

Demina M. V.<sup>1</sup>, Kudryashov N. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia; mvdemina@mephi.ru*

<sup>2</sup>*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia; nakudr@gmail.com*

Multi-particle dynamical systems, such as collections of interacting point vortices in the plane and on a sphere, have been attracting much attention during recent years [1-4]. The point vortex system, an elegant and visual model of fluid dynamics, is not integrable in the case of four or more vortices with generic choice of circulations [1]. That is why particular motions, such as relative and absolute equilibria, collapse, and scattering are of great importance. A well-known class of absolute equilibria involving point vortices with equal in absolute value circulations is given by two neighbor Adler–Moser polynomials [5]. It is a remarkable fact that the Adler–Moser polynomials themselves provide solutions of another multi-particle system, the Calogero–Moser dynamical system, related to the Korteweg – de Vries equation.

In this talk we describe a method enabling one to construct and to classify equilibrium, collapse, and scattering configurations of point vortices in the plane. The most part of vortex configurations known explicitly involves the vortices with equal in absolute value circulations. While we consider arbitrary vortex systems with generic choices of circulations. The starting point of the method is a polynomial or a system of polynomials with roots at the vortex positions [2-4]. Further these polynomials are shown to obey certain ordinary differential equations. With the help of the method we also derive ordinary differential equations, which can be used to construct stationary vortex configurations on a cylinder and in the plane in the presence of a background flow. Using the technique of Darboux transformations we show that Wronskians of classical orthogonal polynomials solve some of the obtained ordinary differential equations. We find a number of previously unknown configurations.

In addition we apply the polynomial method to the problem of finding relative equilibrium configurations of point vortices on a sphere. We give explicit expressions for relative equilibrium configurations formed by point vortices placed at the vertices of the Platonic solids. Along with this we prove that the only possible relative equilibrium arrangements of identical point vortices located at a single latitude on a sphere are regular polygons. The same statement is true if we add vortices of arbitrary circulations at the North and the South Poles of the sphere.

The strength of the method lies in the fact that it works in both directions: from, for example, point vortex relative equilibria to a differential equation and vice versa. Using this fact we generalize the method to a wide class of other multi-particle systems. Some interesting systems possessing equilibria given by the roots of classical and semi-classical orthogonal polynomials are considered.

Since 1929 there has existed a hypothesis that the Adler–Moser polynomials provide unique polynomial solutions to the Tkachenko equation. As a consequence of our results we obtain polynomial solutions, which can not be included into the sequence of the Adler–Moser polynomials [4].

In this talk we also discuss a connection of some multi-particle systems with the theory of integrable differential equations: partial, such as the Korteweg – de Vries equation, the Sawada–Kotera equation, and ordinary, such as the Painlevé equations.

REFERENCES

1. Borisov A. V., Mamaev I. S., *Mathematical Methods of Dynamics of Vortex Structures*, Moscow–Izhevsk: R&C Dynamics, ICS (2005) (Russian).
2. Aref H., “Relative equilibria of point vortices and the fundamental theorem of algebra”, *Proc. R. Soc. A*, **467**, 2168–2184 (2011).
3. O’Neil K. A., “Minimal polynomial systems for point vortex equilibria”, *Physica D*, **219**, 69–79 (2006).
4. Demina M. V., Kudryashov N. A., “Vortices and polynomials: non–uniqueness of the Adler–Moser polynomials for the Tkachenko equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 195205 (2012).
5. Adler M., Moser J., “On a class of polynomials connected with the Korteweg–de Vries equation”, *Commun. Math. Phys.*, **61**, 1–30 (1978).

## ON THE MOTION OF A DISK ON A HORIZONTAL ROUGH PLANE

Erdakova N. N.<sup>1</sup>, Mamaev I. S.<sup>2</sup>, Karavaev Yu. L.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; enn@rcd.ru

<sup>2</sup>Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; mamaev@rcd.ru

<sup>3</sup>Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles,  
Udmurt State University, Izhevsk, Russia; Kalashnikov Izhevsk State Technical University,  
Izhevsk, Russia; karavaev\_yury@istu.ru

This work is devoted to the theoretical and experimental investigation of the dynamics of a rigid body with flat base on a horizontal rough plane under the assumption of dry Amontons – Coulomb friction  $\mathbf{F} = - \int_D p(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r})}{|\mathbf{v}(\mathbf{r})|} dx_1 dx_2$  and linear pressure distribution of the body on a plane  $p(\mathbf{r}) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$ , where  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  is the velocity at the point  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ , and  $a_0, a_1, a_2$  are the coefficients depending on the linear and angular velocities of the body. This model is the simplest dynamically consistent friction model, that is, the projection of the total moment of forces on the plane is zero. This enables the dynamics of a nonplanar body (disc) to be studied.

The equations of motion in explicit form are obtained for a balanced body with an axisymmetric contact area (i.e. one of the principal axes of inertia of the body coincides with the symmetry axis of the contact area and its center of mass also lies on this axis).

A number of experiments have been carried out to investigate the motion of steel and plastic discs on horizontal surfaces.

A qualitative and quantitative analysis of model and experimental time dependence of kinematic quantities and trajectories of the disk are performed. This enables a conclusion to be drawn about the applicability of the described model system to the simulation of body dynamics on the plane in real-life environment.

### REFERENCES

1. Ivanov A. P., “ A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body”, J. Appl. Math. Mech., **73**, no. 2, 134–144 (2009).
2. Ishlinskii A. Yu., Sokolov B. N., Chernousko F. L., Izv. Akad. Nauk SSSR Mekh. Tverd. Tela, No. 4, 17–18 (1981).
3. Treschev D. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B., “On the final motion of cylindrical solids on a rough plane”, Rus. J. Nonlin. Dyn., **8**, No. 3, 585–603 (2012).
4. Farkas Z., Bartels G., Unger T., and Wolf D. E., “Frictional Coupling between Sliding and Spinning Motion”, Phys. Rev. Lett., **90**, No. 24, 248302 (2003).

## DYNAMICS OF SECOND ORDER EQUATIONS WITH ASYMPTOTICALLY LARGE DELAY

Glazkov D. V.

*Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia; glazkov\_d@mail.ru*

This talk is devoted to study of one class of second order equations which contain terms with retarded argument and nonlinear terms. The most common view is following:

$$\ddot{x} + F(\dot{x}, x) = \varepsilon \int_{-T}^0 \Phi(x(t+s), s) ds. \quad (1)$$

We consider some particular cases of  $F$  and  $\Phi$  functions. We find special solutions of nonperturbed equation while  $\varepsilon=0$ . There are steady states, limit cycles or homoclinic trajectories. We solve their stability problems and interest by features of close solutions of full equation (1). The most complicated case is the case that corresponds to asymptotically large values of parameter  $T$  because of any roots of characteristic equation in the vicinity of imaginary axis under the convenient conditions.

## NUMERICAL ANALYSIS OF PSEUDOHYPERBOLICITY

Glyzin D. S.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia; glyzin@gmail.com*

Hyperbolic structures are widely studied in dynamical systems theory; however, it is still unclear if “real” systems can exhibit non-trivial hyperbolic attractors. Attempts are made to construct such systems manually [1,2]. We use different approach, namely, pseudohyperbolicity [3], that is relevant for more simple models [4].

We propose an implementation of covariant Lyapunov vector analysis algorithm [5], with main emphasis made on an angle between volume-expanding and strongly contracting subspaces.

### REFERENCES

1. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.*, “The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **15**, No. 11, pp. 3567–3578 (2005).
2. *Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.*, “Hyperbolic chaos in parametric oscillations of a string,” *Nelin. Dinam.*, **9**, No. 1, 3–10 (2013).
3. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.*, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I.* World Scientific, Singapore (1998).
4. *Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simo C., Turaev D.*, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**, No. 11, 3493-3508 (2005).
5. *Ginelli F., Poggi P., Turchi A., Chaté H., Livi R., Politi A.*, “Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors,” *Phys. Rev. Lett.*, **99**, No. 13 (2007).

## DYNAMICS OF RELAXATION OSCILLATIONS IN TWO-MODE MICROCHIP LASER

**Grigorieva E. V.**

*Belarus State Economical University, Minsk, Belarus; grigorieva@tut.by*

Solid-state microchip lasers are widely applied in the modern electronic technologies. A characteristic feature of such lasers, as a consequence of the small cavity size, is the possibility of the multimode generation and the complex dynamics of the modes. In this paper we study relaxation oscillations in multimode Nd:YVO<sub>4</sub> laser on the base of the model of the rate equations [1-3], which in the case of two-mode lasing are of the form:

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= v[u_i(y_i(1 - \eta u_j) - 1) + \alpha y_i], \\ \frac{dy_i}{dt} &= q - y_i - \gamma_i y_i(u_i + \beta u_j),\end{aligned}\tag{1}$$

where  $i = 1, 2$ ,  $j = 3 - i$ ;  $u_i$  is normalized intensity of the  $i$ -th longitudinal mode;  $y_i$  is proportional to the population inversion;  $v$  is the ratio of the photons decay rate in the resonator to the relaxation rate of the populations;  $t$  is time normalized to the inversion decay time;  $\gamma_i$  is the linear coefficient of amplification;  $\alpha$  is the coefficient of spontaneous emission into the mode;  $q$  is the pumping rate normalized to the threshold value. The coupling between the modes due to spatial burning holes is proportional to  $\beta y_i u_j$ , and the coupling due to the effect of cross-saturation describes by the terms  $\eta y_i u_j$ .

For class B lasers the parameter  $v$  takes large values of the order of  $10^3 - 10^6$ , hence, the system (1) is singular perturbed. The presence of the large parameter allows to apply methods of asymptotic integration with  $v \rightarrow \infty$  to build relaxation solutions in the form of short spikes. Let fix the initial conditions corresponding to the beginning of the spike of the 1st mode,  $u_1(0) = 1$ ,  $u_1'(0) > 0$ ,  $u_2(0) = \exp(vm)$ ,  $m < 0$ ,  $y_1(0) = c_1$ ,  $y_2(0) = c_2$ . Then the energy of the short spike  $p_1 = p_1(c_1)$  can be found as a positive root of the equation

$$c_1 - p_1 + c_1 \exp(-p_1) = 0,$$

and by the interval  $T = \min\{T_1, T_2\}$  the next spike begins of the 1st mode, if  $T_1 < T_2$ , or of the 2nd mode, if  $T_1 > T_2$ , with the initial conditions determined by the finite dimensional map,

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{m} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} f(\gamma_1, c_1, p_1, T_1) \\ f(\gamma_2, c_2, p_2, T_1) \\ F(\gamma_2, c_2, p_2, T_1) + m \end{pmatrix}, & T_1 < T_2 \\ \begin{pmatrix} f(\gamma_2, c_2, p_2, T_2) \\ f(\gamma_1, c_1, p_1, T_2) \\ F(\gamma_1, c_1, p_1, T_2) \end{pmatrix}, & T_2 < T_1 \end{cases}\tag{2}$$

where  $p_2 = \beta p_1$ ,

$$f(\gamma, c, p, T) = q + (ce^{-\gamma p} - q)e^{-T},$$

$$F(\gamma, c, p, T) = (\gamma q - 1)T + (ce^{-\gamma p} - q)(1 - e^{-T}),$$

the interval lengthes  $T_1$  and  $T_2$  are defined as the roots of the equations

$$F(\gamma_1, c_1, p_1, T_1) = 0 \text{ and } F(\gamma_2, c_2, p_2, T_2) + m = 0,$$

respectively.

Attractors of the map (if such ones exist) correspond to the relaxation oscillations in the original system. In particular, if for each iteration, the condition  $T_2 < T_1$  is valid then to a fixed point there corresponds antiphase relaxation oscillations with modal frequencies in the relation 1:1. If the conditions  $T_2 < T_1$  and  $T_2 > T_1$  are strictly alternate, we obtain antiphase oscillations with modal frequencies in the relation 1:2. In this way the domains can be found in the parameter space that correspond to  $p : q$  synchronization of relaxation spikes.

#### REFERENCES

1. *Otsuka K., Hwong S. L., Nguyen Ba An* “Intrinsic instability and locking of pulsation frequencies in free-running two-mode class-B lasers”, *Phys. Rev. A*, **61**, 053815 (2000).
2. *Uchida A., Mizumura K., Yoshimori S.*, “Chaotic dynamics and synchronization in microchip solid-state lasers with optoelectronic feedback”, *Phys. Rev. E*, **74**, 066206 (2006).

## ON THE MOTION OF A STICK-LIKE BODY ON A ROUGH SURFACE

Ivanova T. B.<sup>1</sup>, Ivanov A. P.<sup>2</sup>, Mamaev I. S.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Udmurt State University, Izhevsk, Russia; tbesp@rcd.ru

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia;  
apivanov@orc.ru

<sup>3</sup>Udmurt State University, Izhevsk, Russia; mamaev@rcd.ru

In this paper we consider the motion of a body whose sharp edge is in contact with a rough plane, in particular, the plane motion of a homogeneous rod and the Lagrange top. Since the plane realizes a unilateral constraint, the body can move so that its end which is in contact with the plane does not move or slips or loses touch with the support, depending on the initial conditions. Therefore, in this paper, the dynamics of the system is considered within three mechanical models that describe different modes of motion: the model of an inverted pendulum, a sliding rod and a free rod. The boundaries of definition range of each model are given, the possibility of transitions from one mode to another and their consistency is discussed.

For the rod on the horizontal plane, if there are no active forces other than gravity ( $\varepsilon = P_t/mg = 0$ ,  $P_t$  – projection of the active forces onto the plane of motion of the contact point), with  $\mu > \mu_* = 2\sqrt{\kappa(1 + \kappa)}$ ,  $\kappa = I/ml^2 = 1/3$  for a homogeneous rod, the regions of possible motions of different models intersect but only in such a way that for identical initial conditions there exist no more than two decisions [1, 2].

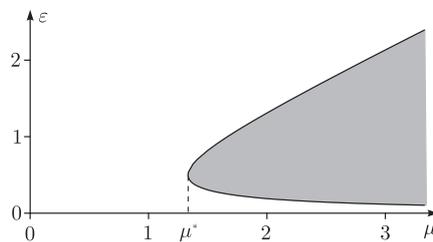


Fig. 1.

direction of sliding of the contact point during motion, and others.

On the oblique plane ( $\varepsilon \neq 0$ ) starting from the defined  $\mu \geq \mu_*$  (colored area in Fig. 1), regions arise in which there are decisions within all three mathematical models at the same time. An example of such a region is shown in Fig. 2.

During the work, phase trajectories were constructed for different models of motion, and graphs were plotted showing the time dependence of the speed of the contact point, the angle of inclination, and other variables for the case of transition from one model to another, change in the

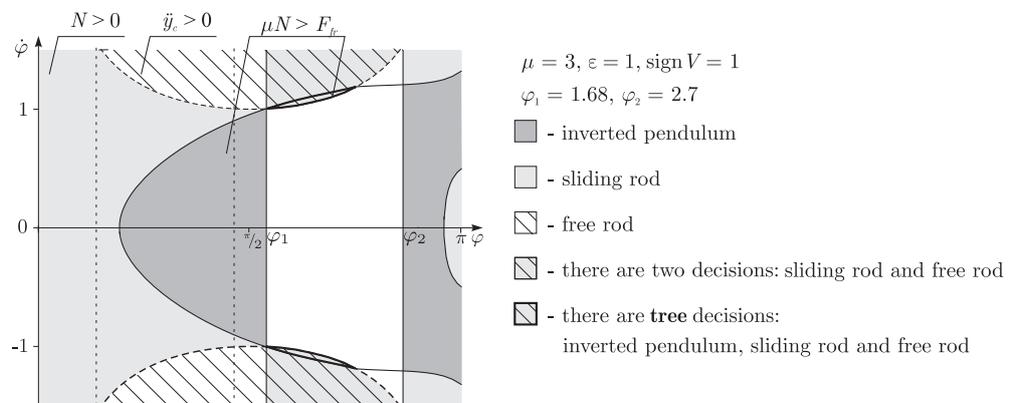


Fig. 2.

*REFERENCES*

1. *Ivanov A. P.*, “Bifurcations in systems with friction: basic models and methods”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**, No. 6, 656–672 (2009).
1. *Ivanov A. P., Shuvalov N. D., Ivanova T. B.*, “On detachment conditions of a top on an absolutely rough support”, *Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science*, No. 3, 103-113 (2012).

## ON THE DYNAMICS OF A RUBBER ROCK’N’ROLLER ON A PLANE

Kazakov A. O.<sup>1</sup>, Borisov A. V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Inst. of Computer Science, Izhevsk, Russia; kazakovdz@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Inst. of Computer Science, Izhevsk, Russia; borisov@rcd.ru*

We consider the dynamics of the rubber rock’n’roller (a ball with a displaced gravity center) on a rough plane. The term “rubber” [1] means that the vertical spinning of a body is impossible. The plane roughness means that a body moves without slipping. Rock’n’roller motions are described by the nonholonomic system being reversible with respect to several involutions, its number depends on the type of a mass center displacement. We demonstrate for this system the existence of complex dynamics which type depends on the kind of reversibility.

The dynamics of the rubber rock’n’roller is governed by the system of 6 equations, which admit 3 integrals: energy, geometric and rubber which reduce the problem dimension from 6 to 3. To visualize the dynamics of this system we construct two-dimensional Poincaré map in the Andoyer – Deprit variables [2].

If the ball mass displaced along all 3 body frame axis there is only one reversibility in the system, connected with angular velocities inversion. In this case we found strange attractor and (symmetrical by reversibility) strange repeller (see fig. 1). Strange attractor has positive leading Lyapunov exponent and the sum of all exponents is negative.

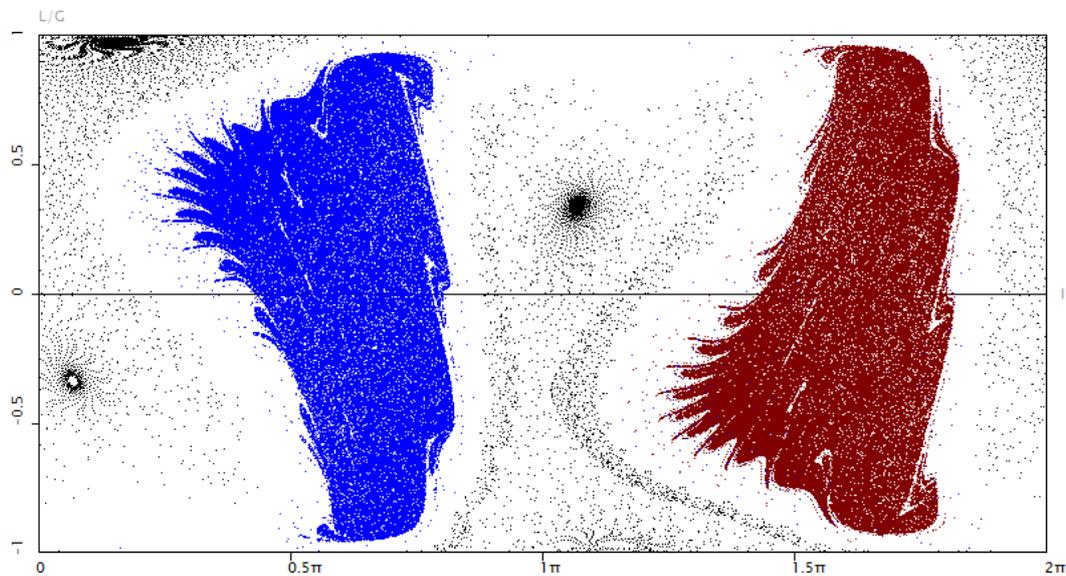


Fig. 1. Strange attractor (left) and strange repeller (right)

If the ball mass displaced along 2 body frame axis, the system owns additional reversibility. Due to this reversibility, behavior in the system changes sufficiently. In this case an attractor and a repeller are not separated (see fig. 2). We suppose that such chaotic behavior is the mixed chaotic dynamics, described at [3, 4]. In support of this fact we find long periodic orbits of different types (stable and completely unstable) inside this chaos.

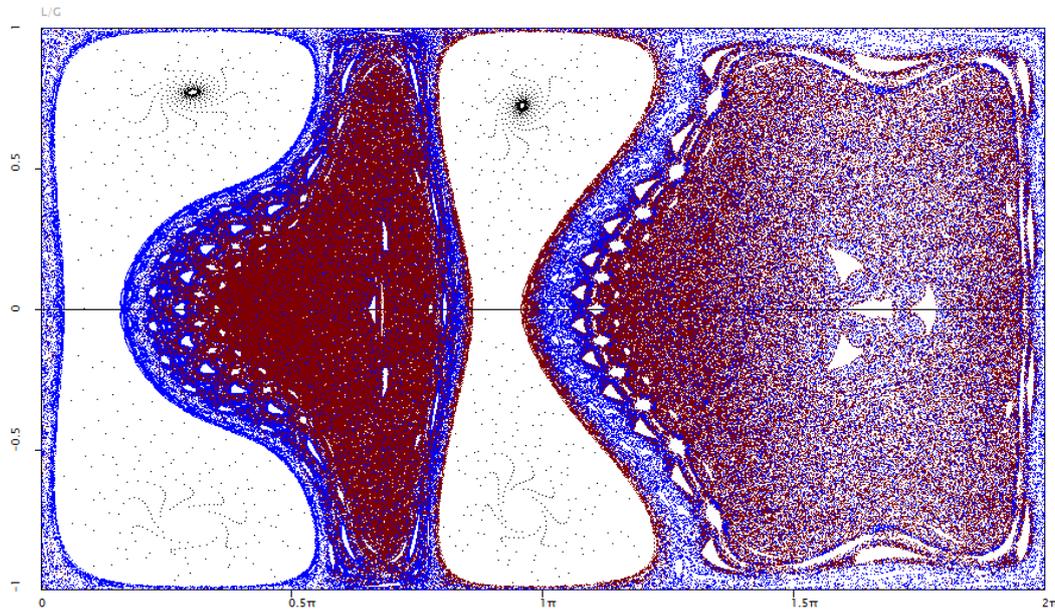


Fig. 2. Mixed chaotic dynamics: attractor and repeller are not separated

#### REFERENCES

1. *Ehlers K. and Koiller J.*, Rubber Rolling: Geometry and Dynamics of 2-3-5 Distributions, Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, 2006.
2. *Borisov A. V., Mamaev I. S.*, Rigid body dynamics. Hamiltonian methods, integrability, chaos, Institute of Computer Science, Moscow–Izhevsk, 2005.
3. *Lamb J. S. W., Stenkin O. V.*, “Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits”, *Nonlinearity*, **17**, No.4, 1217–1244 (2004).
4. *Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Stenkin O. V., Delshams A., et al.*, “Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps”, arXiv preprint arXiv:1201.5357 (2012).

## ON THE MOTION AND CONTROL OF A THREE-AXIAL ELLIPSOID IN THE VISCOUS FLUID

Kilin A. A.<sup>1</sup>, Vetchanin E. V.<sup>2</sup>, Tenenev V. A.<sup>3</sup>, Shaura A. S.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Udmurt state university, Izhevsk, Russia; aka@rcd.ru*

<sup>2</sup>*Udmurt state university, Izhevsk, Russia; eugene186@mail.ru*

<sup>3</sup>*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia; tenenev@istu.ru*

<sup>4</sup>*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia; shauraa@mail.ru*

We consider the control problem of spatial locomotion of mobile device without external locomotors according to the predetermined trajectory in the ideal fluid. Device represents the system that consists of the external rigid shell in the form of three-axial ellipsoid and three rotors that are positioned inside the shell. All rotors are identical, axisymmetrical and rotational axes coincide with their axes of symmetry and centerlines of the shell. The center of mass of entire system is displaced from the geometric center of ellipsoidal shell. The similar problem of motion stabilization by means internal rotors was considered in [1] and the plane motion of that mobile device was investigated in [2, 3].

The locomotion of the system is considered relating to two systems of coordinates - stationary and moving which is rigidly bound with the centerlines of shell. In the case of ideal fluid linear and angular velocities  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  of the centre of the shell in the projections on the axis of moving coordinate system are expressed by means of gyrostatic moment  $\mathbf{K}(t)$ .  $\mathbf{K}(t)$  is determined by the values of the inertia tensors of rotors and angular velocity of rotation of rotors  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  at every instant of time  $t$ .

With the aim of determining the coordinates of the center of the shell in the fixed coordinate system is solved the follow system of the kinematic equations [4]:

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \mathbf{\Omega}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \mathbf{\Omega}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \mathbf{\Omega}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = \mathbf{V} \cdot \alpha, \quad \dot{y} = \mathbf{V} \cdot \beta, \quad \dot{z} = \mathbf{V} \cdot \gamma,$$

where  $x, y, z$  — coordinates of the center of the shell;  $\alpha, \beta, \gamma$  — the projections of basis vectors of the axes of fixed coordinate system on the axis of moving coordinate system.

It is possible to control the direction of locomotion of the mobile device by means of change in the angular velocities  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  of rotors rotations by taking their values as a control function. For guaranteeing the motion along the predetermined trajectory it is necessary to solve the optimal control problem of Lagrange's type. Let us assume the minimum value of the mean-square deviation of the system trajectory  $\mathbf{r}(t)$  from the given trajectory  $\mathbf{Y}(t)$  as the criterion of optimality [5]:

$$J = \int_0^T |\mathbf{r}(t) - \mathbf{Y}(t)| dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

The system of ordinary differential equations of motion (2) was solved numerically. To solve the optimal control problem (1)–(2) we use genetic algorithm based on the technologies of parallel calculations .Net 4.0.

The results of calculations showed that control of the spatial locomotion of the considered system is sufficiently complicated but it is possible to reach any point of space using the corresponding sequence of the values of the control parameters. The application of parallel genetic algorithms allows to solve the complex problems of optimal control of spatial locomotion for an acceptable time. The comparison of the results of numerical calculation with control obtained analytically was carried out.

REFERENCES

1. Woolsey C. A., Leonard N. E., “Underwater Vehicle Stabilization by Internal Rotors”, in: Proceedings of the American Control Conference, 1999, 5 p.
2. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., “How to Control Chaplygin’s Sphere Using Rotors”, Regular and Chaotic Dynamics, **17**, Nos. 3–4, 258–272 (2012).
3. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., “How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II”, Regular and Chaotic Dynamics, **18**, Nos. 1–2, 144–158 (2013).
4. Kozlov V. V., Ramodanov S. M., “On the motion of a variable body in an ideal fluid”, J. Appl. Math. Mech., **65**, No. 4, 579–587 (2001).
5. Vetchanin E. V., Tenenev V. A., “Motion control simulating in a viscous liquid of a body with variable geometry of weights”, Computer Research and Modeling, **3**, No. 4, 371–381 (2011).

## NOTES ON INTEGRABLE SYSTEMS

**Kozlov V. V.**

*Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;*  
vkozlov@mi.ras.ru

The problem of integrability conditions for systems of differential equations is discussed. Darboux's classical results on the integrability of linear non-autonomous systems with an incomplete set of particular solutions are generalized. Special attention is paid to linear Hamiltonian systems. The paper discusses the general problem of integrability of the systems of autonomous differential equations in an  $n$ -dimensional space which permit the algebra of symmetry fields of dimension  $\geq n$ . Using a method due to Liouville, this problem is reduced to investigating the integrability conditions for Hamiltonian systems with Hamiltonians linear in the momentums in phase space of dimension that is twice as large. In conclusion, the integrability of an autonomous system in three-dimensional space with two independent non-trivial symmetry fields is proved. It should be emphasized that no additional conditions are imposed on these fields.

## PAINLEVÉ EQUATIONS AND THEIR HIERARCHIES

**Kudryashov N. A.**

*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia; nakudr@gmail.com*

Paul Painlevé is as the mathematician and the politician. The great work by Painlevé and his student for investigation of the second order of nonlinear differential equations. The Painlevé equations and the Painlevé transcendents. The work by S.V. Kovalevskaya for investigation of the body motion with unmovable point. The essence of the Painlevé method for investigation of nonlinear differential equations. The generalization of the Painlevé approach on the case of nonlinear partial differential equations.

The short introduction to the theory of the Painlevé equations. Some basic properties of the Painlevé equations. Applications of the Painlevé equations in physics and in mathematics. It is shown that for all Painlevé equations can be constructed the hierarchies. Equations of these hierarchies are similar to the Painlevé equations and can be called as the higher order Painlevé equations.

Some simple hierarchies of the Painlevé equations. The Backlund transformations for the the PII hierachy and for the KII hierarchy. Rational and special polynomials associated with the Painlevé equations and their hierarchies. Recursion formulae for finding of nonlinear special polynomials. The connection of the nonlinear special polynomials with the Tkachenko equation and with the theory of the point vortices.

The author was supported by the grant for Scientific Schools 16.120.11.6148 and by the RFBR grant 12-01-31329

## **PAINLEVÉ ANALYSIS AND EXACT SOLUTIONS OF EXTENDED MODEL FOR NONLINEAR WAVES IN LIQUID WITH GAS BUBBLES**

**Kudryashov N. A.<sup>1</sup>, Sinelshchikov D. I.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia; nakudr@gmail.com*

In this talk we discuss analytical properties of the extended model for nonlinear waves in a liquid with gas bubbles. We present the derivation of the equations for long weakly nonlinear waves in a liquid with gas bubbles taking into account higher order corrections in the asymptotic expansion. In the case of the dissipation main influence nonlinear waves are governed by the perturbation of the Burgers equation. The perturbation of the Burgers–Korteweg–de Vries equation governs nonlinear waves in the case of dispersion main influence. The normal forms for the above mentioned equations are constructed with the help of the near–identity transformations. The Painlevé analysis of these equations is carried out. We show that the normal form of the perturbed Burgers equation is integrable in the Painlevé sense under certain condition on the parameters. The physical relevance of this condition is discussed. We obtain exact solutions for the nonintegrable case of the perturbed Burgers equation using approach based on the Painlevé method. Two cases of the perturbed Burgers–Korteweg–de Vries equation are considered. The first one is the case of negligible dissipation (purely dispersive case). It is shown that in this case nonlinear waves are governed by one of the integrable fifth order evolution equations. The general form of the dispersive nonlinear evolution equation seems to be nonintegrable in the Painlevé sense. However this equation admits analytically solitary wave solutions. These solutions were obtained using approach based on Painlevé method as well.

The authors were supported by the grant for Scientific Schools 16.120.11.6148 and by the RFBR grant 12-01-31329

## ON THE MOTION OF A BALL WITH A SPHERICAL PENDULUM

Pivovarova E. N.<sup>1</sup>, Ivanova T. B.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Udmurt State University, Izhevsk, Russia; l.n.pivovarova@gmail.com

<sup>2</sup> Udmurt State University, Izhevsk, Russia; tbesp@rcd.ru

In this paper we study the motion of a spherical shell rolling on a horizontal plane with an axisymmetric pendulum fixed at the center of a shell [1].

In particular, we carry out a stability analysis for this system [2]: a linear analysis for the two simplest solutions with the pendulum rotating about its axis in the lower and upper positions, and a topological analysis, in which regions of existence and stability of periodic solutions are found (see the bifurcation diagram in Fig. 1).

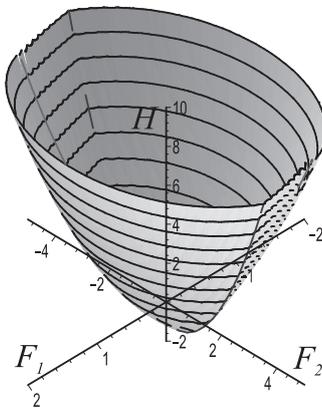


Fig. 1. Bifurcation diagram of the system,  $H$  — energy,  $F_1, F_2$  — linear integrals

In addition, the free motion of the system at different initial values of angular velocities and deviations of the pendulum is considered, and the trajectories of the contact point for different values of the integrals of motion are constructed (Fig. 2).

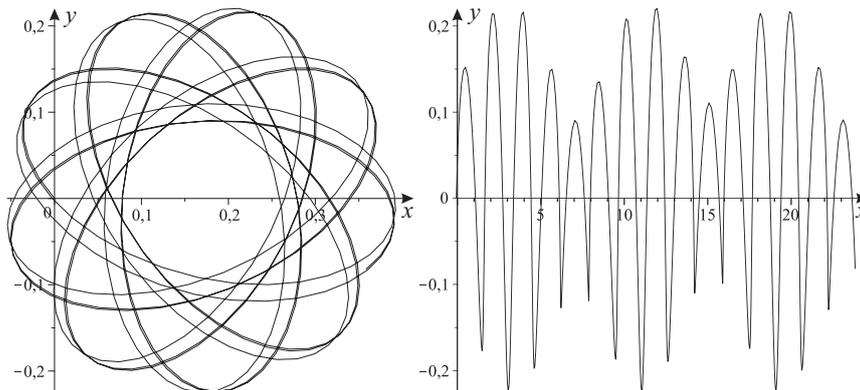


Fig. 2. The trajectories of the contact point (the trajectory is constructed with initial momentum  $P_x = 0$  in the left figure and with initial momentum  $P_x = 10$  in the right figure)

Moreover, the controlled motion of the system is considered. Control is carried out by means of the torque  $\mathbf{Q}$  generated by the engine which is installed at the point of attachment

of the pendulum to the ball. An analysis of the equations of motion is carried out and the condition restricting the parameters of the system is found for which a controlled motion is possible. Some of the simplest cases of motion of the system are discussed: uniformly accelerated motion in a straight line, uniform motion in a parabola and a circle etc. The control in which acceleration to some given velocity occurs for one oscillation of the pendulum is considered in detail (Fig. 3).

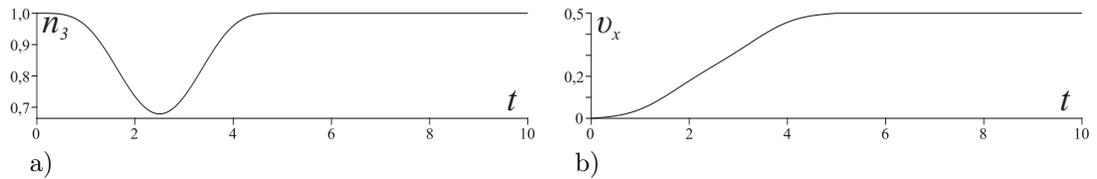


Fig. 3. a) Time dependence of the projection of the vector directed along the axis of symmetry of the pendulum onto the z-axis; b) Time dependence of the velocity of the ball: for one oscillation the velocity is changed by a given value

#### REFERENCES

1. Borisov A.V., Mamaev I.S., "Two Non-holonomic Integrable Problems Tracing Back to Chaplygin", *Regular and Chaotic Dynamics*, **17**, No. 2, 191–198 (2012).
2. Pivovarova E.N., Ivanova T.B., "Stability analysis of periodic solutions in the problem of the rolling of a ball with a pendulum", *Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science*, No. 4, 146–155 (2012).

## FALLING OF A HEAVY CIRCULAR CYLINDER INTERACTING DYNAMICALLY WITH $N$ POINT VORTICES

Sokolov S. V.

*Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; sokolovsv72@mail.ru*

A system which consists of a heavy circular cylinder and  $N$  point vortices in an unbounded volume of ideal liquid was considered [1]. The liquid is assumed to be irrotational and at rest at infinity. The circulation about the cylinder is different from zero.

The equations governing the motion of a body interacting dynamically with point vortices were originally derived in [2]. Here the equations of motion differ from those in [2] by the presence of the constant gravity term in the right-hand side. Using the symplectic structure from [3], we represent these equations in the Hamiltonian form. In a case of single vortex obtained Hamiltonian system with three degrees of freedom is shown to admit (besides the Hamiltonian) two integrals of motion: the horizontal and the vertical components of the linear momentum. Unfortunately, the latter is non-autonomous. With the help of the autonomous integral we reduced the number of degrees of freedom by one and thereby obtained a two-degrees-of-freedom Hamiltonian system which seems to be non-integrable. Partial solutions of the system are studied and most remarkable types of motion are outlined. Stability of the relative equilibrium points of the reduced system was explored.

### REFERENCES

1. Sokolov S. V., Ramodanov S. M., "Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex", *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**, Nos.1–2, 184–193 (2013).
2. Ramodanov S. M., "Motion of a Circular Cylinder and a Vortex in a Ideal Fluid", *Regular and Chaotic Dynamics*, **6**, No. 1, 33–38 (2001).
3. Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M., "Dynamics of a Circular Cylinder Interacting with Point Vortices", *Discrete and Contin. Dyn. Syst.*, **5**, No. 1, 35–50 (2005).

## **KAM-TORI NEAR RESONANCES**

**Treschev D. V.**

*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science, Moscow, Russia;*  
`treschev@mi.ras.ru`

We study quasiperiodic motions of Hamiltonian systems in resonance zones and projections of the corresponding KAM-tori to the space of action variables.

## ON THE MOTION AND CONTROL OF A THREE-AXIAL ELLIPSOID IN THE VISCOUS FLUID

Vetchanin E. V.<sup>1</sup>, Kilin A. A.<sup>2</sup>, Tenenev V. A.<sup>3</sup>, Shaura A. S.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Udmurt state university, Izhevsk, Russia; eugene186@mail.ru*

<sup>2</sup>*Udmurt state university, Izhevsk, Russia; aka@rcd.ru*

<sup>3</sup>*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia; tenenev@istu.ru*

<sup>4</sup>*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia; shauraa@mail.ru*

We consider the problem of spatial motion of a mobile device through an infinite volume of viscous incompressible fluid. The device consists of a rigid shell having the shape of a three-axial ellipsoid and three rotors are placed inside of the shell. The center of mass of the entire system is displaced from the geometrical center of the shell. All rotors have same mass, are axisymmetrical, and their rotation axes coincide with their axes of symmetry and with the centerlines of the shell. The rotation axes of the rotors are not coplanar. The angular velocities of the rotors are defined by functions of time  $\omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . The device has no external locomotors. A similar problem of motion stabilization by means internal rotors was considered in [1] and the motion of a similar mobile device on a plane was investigated in [2, 3]. The motion through the viscous fluid of a body with a variable center of mass was discussed in [4].

The motion of the shell is governed by the following equations

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}(t), \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P} \times \mathbf{V} + \mathbf{G}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^T\mathbf{V} + \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K}(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t) - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{P})$$

$$\mathbf{K}(t) = \sum_{k=1}^3 i\omega_k(t)\mathbf{n}_k, \quad (3)$$

where  $\mathbf{P}$  is the linear momentum,  $\mathbf{M}$  the angular momentum,  $\mathbf{V}$  the linear velocity,  $\boldsymbol{\Omega}$  the angular velocity,  $\mathbf{K}$  the gyrostatic momentum,  $\mathbf{F}$  the force of medium resistance, and  $\mathbf{G}$  is the torque.

The matrices  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ , and  $\mathbf{C}$  can be represented as

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \frac{1}{2}m_s(\mathbf{r}_s^2\mathbf{E} - \mathbf{r}_s \otimes \mathbf{r}_s) + \frac{1}{2}m_R \sum_{k=1}^3 (\mathbf{r}_k^2\mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k), \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & -x_c & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$m = m_s + 3m_R,$$

where  $m_s$  is the shell mass,  $\mathbf{I}_s$  the central inertia tensor of shell,  $r_s$  the center of mass of the shell,  $m_R$  the mass of the rotor,  $\mathbf{I}_k$  the central inertia tensor of the  $k$ -th rotor,  $r_k$  the center of mass of the  $k$ -th rotor,  $x_c, y_c, z_c$  are the coordinates of the center of mass of the entire system.

The motion of the fluid is governed by the Navier–Stokes equations [5]

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \nabla \cdot (\mathbf{U}(\mathbf{U} - \mathbf{W})) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (8)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (9)$$

where  $\mathbf{U}$  is the absolute velocity of the fluid projected onto a moving coordinate system,  $p$  the pressure,  $\mathbf{W}$  the transport velocity,  $\rho$  the fluid density,  $\nu$  the kinematic coefficient of viscosity, and  $\mathbf{r}$  is the radius-vector of a point of the fluid.

The force and the torque are calculated by the following surface integrals

$$\mathbf{F}(t) = \int_S \left( -p\mathbf{E} + \rho\nu(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (10)$$

$$\mathbf{G}(t) = \int_S \mathbf{r}_S \times \left( \left( -p\mathbf{E} + \rho\nu(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T) \right) \cdot \mathbf{n} \right) dS \quad (11)$$

where  $S$  is the body's surface.

The investigation of the characteristics of motion of an ellipsoidal body with internal rotors in a viscous fluid is carried out on the basis of a joint numerical solution of the Navier–Stokes equations and equations of motion for a rigid body. A comparison of the results of numerical calculation with the case of an ideal fluid has been carried out.

#### REFERENCES

1. Woolsey C. A., Leonard N. E., "Underwater Vehicle Stabilization by Internal Rotors", in: Proceedings of the American Control Conference, 1999, 5 p.
2. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., "How to Control Chaplygin's Sphere Using Rotors", Regular and Chaotic Dynamics, **17**, Nos. 3–4, 258–272 (2012).
3. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., "How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II", Regular and Chaotic Dynamics, **18**, Nos. 1–2, 144–158 (2013).
4. Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A., "The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid", Regular and Chaotic Dynamics, **18**, Nos. 1–2, 100–117 (2013).
5. Mougin G., Magnaudet J., "The generalized Kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow", International Journal of Multiphase Flow, **28**, No. 11, 1837–1851 (2002).

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ  
РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,  
МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПОВОРОТ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
С ДВУМЯ УПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ**

**OPTIMAL CONTROL OF THE BEHAVIOR OF  
SOLUTIONS OF INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM  
MODELING THE ROTATION OF A RIGID BODY  
WITH TWO ELASTIC RODS**

Елисеев Д. А.<sup>1</sup>, Кубышкин Е. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия;  
e-mail: dim.ok@mail.ru

<sup>2</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия;  
e-mail: kubysh@uniyar.ac.ru

Рассматривается следующая нелинейная начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + m_1 \int_0^{l_1} (x_1 + a_1 \cos \alpha_1) \ddot{y}_1(x_1, t) dx_1 + m_2 \int_0^{l_2} (x_2 + a_2 \cos \alpha_2) \ddot{y}_2(x_2, t) dx_2 = M(t), \quad (1)$$

$$\ddot{y}_j + b_j y_j'''' = -\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \sin \alpha_j, \quad (2)$$

$$y_j(0, t) = y_j'(0, t) = 0, y_j''(l_j, t) = y_j'''(l_j, t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1, y_j(x, 0) = y_{j0}(x), \dot{y}_j(x, 0) = y_{j1}(x) \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

в которой

$$J = J_0 + m_1 \int_0^{l_1} (x_1^2 + 2a_1 x_1 \cos \alpha_1 + a_1^2) dx_1 + m_2 \int_0^{l_2} (x_2^2 + 2a_2 x_2 \cos \alpha_2 + a_2^2) dx_2,$$

$\theta(t), y_j(x_j, t)$  ( $0 < x_j < l_j, j = 1, 2, t > 0$ ) искомые функции;  $J_0, m_j, b_j, \alpha_j$  положительные параметры; точками обозначены частные производные по  $t$ , штрихами - частные производные по соответствующему  $x_j$ ,  $M(t) \in L_2(0, T)$ . Начально-краевая задача (1) - (4) описывает поворот твердого тела с двумя прямолинейными упругими стержнями вокруг оси, проходящей через центр масс твердого тела по действием момента внешних сил  $M(t)$ . Стержни расположены в плоскости, перпендикулярной оси вращения, имеют постоянные сечения и равномерно распределенную по длине массы. Деформации стержней моделируются в рамках гипотез Эйлера-Бернулли и гипотезы малого изгиба. Начально-краевая задача (1) - (4) приведена в безразмерных переменных, функция  $\theta(t)$  характеризует угол поворота системы, функции  $y_j(x_j, t), j = 1, 2$  - величины поперечных деформаций соответствующих стержней.

Для начально-краевой задачи (1) - (4) рассмотрены следующие вопросы:

- введено понятие обобщенного решения, определены соответствующие функциональные пространства и интегральное соотношение, определяющее обобщенное решение;
- доказаны теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения, обеспечивающие корректность поставленной начально-краевой задачи;

- построена аналитическая формула решения линейной части начально-краевой задачи (1) - (4) (получаемой из (1)-(4) при  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ ), которая представляет сходящийся ряд по собственным функциям  $v_n(x_1, x_2) = \text{col}(v_1^{(n)}(x_1), v_2^{(n)}(x_2))$ ,  $0 < x_j < l_j$  ( $j = 1, 2$ ) следующей спектральной краевой задачи

$$b_1 v_1'''' - (x_1 + a_1 \cos \alpha_1) J_0^{-1} (m_1 (a_1 v_1''''(0) - v_1''(0)) + m_2 (a_2 v_2''''(0) - v_2''(0))) = \lambda v_1 \quad (5)$$

$$b_2 v_2'''' - (x_2 + a_1 \cos \alpha_2) J_0^{-1} (m_2 (a_2 v_2''''(0) - v_2''(0)) + m_1 (a_1 v_1''''(0) - v_1''(0))) = \lambda v_2 \quad (6)$$

$$v_j(0) = v_j'(0) = 0, \quad v_j''(l_j) = v_j'''(l_j) = 0 \quad (j = 1, 2); \quad (7)$$

- построена полная система собственных значений и ортонормированная в специальном скалярном произведении система собственных функций спектральной краевой задачи (5) - (7), исследована асимптотика собственных значений при  $n \rightarrow \infty$ ;

- построен итерационный процесс, определяющий решение начально-краевой задачи (1) - (4) и доказана его сходимость.

Для начально-краевой задачи (1) - (4) решены следующие задачи оптимального управления:

**Задача 1.** Определить функцию  $M(t)$ , переводящую решение начально-краевой задачи (1) - (4) из начального состояния (4) в конечное

$$\theta(T) = \theta_{0T}, \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, y_j(x, T) = y_{j0T}(x), \dot{y}_j(x, T) = y_{j1T}(x) \quad (j = 1, 2), \quad (8)$$

в заданный момент времени  $T$  и удовлетворяющую следующему условию:

- $M(t) \in L_2(0, T)$  и минимизирует функционал  $\Phi_1(M) = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2$ ;
- $M(t) \in L_\infty(0, T)$  и минимизирует функционал  $\Phi_2(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)}$ .

**Задача 2 (задача быстродействия).** Определить функцию  $M(t)$ , переводящую решение начально-краевой задачи (1) - (4) из (4) в (8) за минимальное время  $T$  при условии:

- $M(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\Phi_1(M) < P_1 < \infty$ ;
- $M(t) \in L_\infty(0, T)$ ,  $\Phi_2(M) < P_2 < \infty$ .

При решении задач 1, 2 доказана управляемость решениями начально-краевой задачи (1) - (4), предложен итерационный алгоритм построения оптимального управления, основанный на решении задач 1, 2 для последовательности линейных начально-краевых задач. Для линейных начально-краевых задач решение задачи оптимального управления сводится к проблеме моментов в соответствующих функциональных пространствах. Доказана сходимость итерационного процесса. Формулируется принцип максимума для последовательности линейных задач, а для начально-краевой задачи (1)-(4) как результат предельного перехода. Минимальное время  $T$  находится итерационно как корень некоторого нелинейного уравнения. Сформулированные результаты обобщают на начально-краевую задачу (1)-(4) результаты работ [1, 2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ. 1992. Т. 56, №2. С. 240–249.
2. Кубышкин Е. П. Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, №5. С. 157–160.

**ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА  
С ПОДВИЖНЫМИ ВНУТРЕННИМИ МАССАМИ  
НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

**RIGID BODY DYNAMICS  
WITH MOVING INTERNAL MASSES  
ON A ROUGH SURFACE**

**Сахаров А. В.<sup>1</sup>, Иванов А. П.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Россия; sah.aleksandr@gmail.com

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Россия; apivanov@orc.ru

В работе рассматривается симметричное твердое тело (слайдер) с прямоугольным основанием, без каких-либо внешних подвижных частей. Тело опирается на горизонтальную шероховатую поверхность. Продольное движение слайдера достигается за счет определенного перемещения внутренней массы вдоль продольной линии симметрии, а также за счет сил сухого трения действующих между плоскостью и основанием слайдера. Для обеспечения поворота системы на плоскости предлагается использовать ротор. Ориентация ротора выбирается двумя различными способами. При первом способе расположения ось вращения ротора совпадает с продольной осью симметрии слайдера. Ускоренное вращение ротора расположенного таким образом влияет на распределение нормальной нагрузки между основанием слайдера и опорной плоскостью. При этом возникает асимметрия в распределении сил трения между основанием и плоскостью. В свою очередь асимметрия в силе трения приводит к вращению слайдера вокруг вертикальной оси. При втором способе ротор располагается так, что ось его вращения вертикальна. Ускоренное вращение ротора в этом случае приводит к возникновению момента силы относительно вертикальной оси, и, таким образом, к повороту слайдера.

Контактные условия между слайдером и поверхностью включают в себя три независимых ограничения на кинематические характеристики системы. Эти ограничения позволяют вычислить три параметра определяющих линейную модель распределения нормальной нагрузки в каждый момент времени. В работе приведено численное моделирование, включающее определение параметров линейной модели нормальной нагрузки и численное интегрирование уравнений движения системы.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00354-а), ФЦП «Кадры» (гос. контракт № 14.A18.21.0374).

*ЛИТЕРАТУРА*

1. Черноушко Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70, №6. С. 915–941.
2. Francois Michaud, Jean de Lafontaine, Serge Caron. A Spherical Robot for Planetary Surface Exploration // Proceeding of the 6th International Symposium on Artificial Intelligence and Robotics & Automation in Space: i-SAIRAS. 2001.
3. Shourov Bhattacharya, Sunil K. Agrawal. Design, Experiments and Motion Planning of a Spherical Rolling Robot // Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation. April 2000.
4. Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
5. Иванов А. П., Сахаров А. В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 763–772.

Научное издание

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Международная конференция,  
посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве  
Ярославль, 15–18 октября 2013 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Подписано в печать 01.10.13. Формат 70×108/16.  
Усл. печ. л. 5.9. Уч.-изд. л. 4.2. Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано на ризографе.  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.